

PROBLEMA DE LOCALIZAÇÃO DE CONCENTRADORES COM MAXIMIZAÇÃO DO LUCRO E CONEXÕES DIRETAS¹

Henrique Heiderscheidt^a, Fabricio Alves Oliveira^{a*}

^aInstituto Federal Catarinense (IFC)
Campus Blumenau, Blumenau-SC, Brasil

Recebido 16/12/2024, aceito 16/06/2025

RESUMO

Este artigo aborda o problema de localização de concentradores com maximização do lucro, permitindo conexões diretas entre os nós não concentradores da rede. O problema consiste em determinar a quantidade e a localização dos concentradores, que são nós especiais na rede com a função de consolidar e distribuir o fluxo de demanda, bem como selecionar os pares de origem e destino a serem atendidos de modo a maximizar o lucro. Uma formulação matemática é proposta, considerando a estratégia de alocação múltipla, rede incompleta, ausência de restrições de capacidade e permitindo conexões diretas. Experimentos computacionais foram realizados para avaliar a formulação, bem como analisar a estrutura da rede. Os resultados mostraram que a formulação possui um desempenho superior em comparação com a literatura e que a inclusão de conexões diretas entre os nós não concentradores aumenta a flexibilidade da rede e contribui para a melhoria do lucro líquido total.

Palavras-chave: Localização de concentradores, Maximização do lucro, Conexões diretas, Projeto de redes.

ABSTRACT

This article addresses the hub location problem with profit maximization, allowing direct connections between the network's non-hub nodes. The problem involves determining the number and location of hubs, which are special nodes in the network responsible for consolidating and distributing demand flows, as well as selecting the origin-destination pairs to be served to maximize profit. A mathematical formulation is proposed, considering a multiple allocation strategy, an incomplete network, the absence of capacity constraints, and allowing direct connections. Computational experiments were conducted to evaluate the formulation and analyze the network structure. The results showed that the formulation outperforms existing approaches in the literature and that the inclusion of direct connections between non-hub nodes increases the network's flexibility and contributes to improving the total net profit.

Keywords: Hub location, Profit maximization, Direct connections, Network design.

*Autor para correspondência. E-mail: fabricio.oliveira@ifc.edu.br
DOI: <https://doi.org/10.4322/PODes.2025.004>

¹Todos os autores assumem a responsabilidade pelo conteúdo do artigo.

1. Introdução

Problemas de otimização em redes, em geral, envolvem o fluxo de itens entre os nós da rede, bem como a determinação da sua configuração, a fim de satisfazer um objetivo específico. De acordo com Arenales et al. (2006), tais problemas são amplamente aplicáveis em áreas como redes de comunicação, transporte de passageiros e transporte de carga.

Em uma rede interligando pares de origem e destino, os concentradores são tipos especiais de nós responsáveis por coletar, consolidar, transferir e distribuir o fluxo de demanda na rede. A demanda entre os pares de nós é roteada, preferencialmente, através dos concentradores, em vez de usar conexões diretas. Isso deve-se ao fato de que, com a consolidação dos fluxos de demanda, uma economia de escala pode ser aplicada nos custos de transporte entre os concentradores, o que possibilita uma redução no custo total de transporte.

O problema de localização de concentradores abrange a definição dos locais de instalação dos concentradores, a atribuição dos nós de demanda a esses concentradores e, ao mesmo tempo, a determinação das rotas de fluxo mais eficazes entre os pares de origem e destino. Esse tipo de problema é considerado NP-difícil (Campbell e O’Kelly, 2012).

Nos últimos anos, os problemas de localização de concentradores têm sido objeto de estudo de muitos pesquisadores, pois possuem aplicações em várias áreas, como sistemas de transporte, tanto de passageiros quanto de cargas (Jaillet et al., 1996; Tan e Kara, 2007; Wieberneit, 2008; Lin et al., 2012; Shen et al., 2021), redes de telecomunicações (Carello et al., 2004; Bollapragada et al., 2006; Kim e O’Kelly, 2009) e serviços de entrega postal (Kuby e Gray, 1993; Çetiner et al., 2010; Afandizadeh et al., 2023).

Na literatura sobre localização de concentradores, os problemas costumam ser modelados com o objetivo de minimizar os custos da rede, de modo que a demanda seja completamente atendida. No entanto, do ponto de vista do lucro, pode ser mais vantajoso não atender à demanda de alguns pares de nós, especialmente quando o custo for maior do que a receita associada ao atendimento dessa demanda. Nessa situação, o mais adequado é maximizar o lucro em vez de minimizar o custo, de forma que a decisão sobre quais pares devem ser atendidos dependa da compensação entre receita e custo.

Outra característica, geralmente considerada nos problemas clássicos de localização de concentradores, é que a rede de concentradores é completa, ou seja, que todos os concentradores são conectados entre si. No entanto, a construção deste tipo de rede pode aumentar de modo desnecessário os custos totais de investimento no projeto da rede. Na realidade, a maior parte das redes de telecomunicações e de transporte de cargas terrestres não operam com uma estrutura de rede de concentradores completa Alumur e Kara (2009).

Adicionalmente, permitir que ligações diretas entre nós não-concentradores sejam realizadas facilita o acesso à rede e é de interesse em muitas aplicações, como no transporte aéreo de passageiros, onde a maioria dos clientes prefere voos diretos para chegar aos seus destinos, ou no transporte de mercadorias, onde há procura suficiente para enviar remessas diretas entre nós não-concentradores.

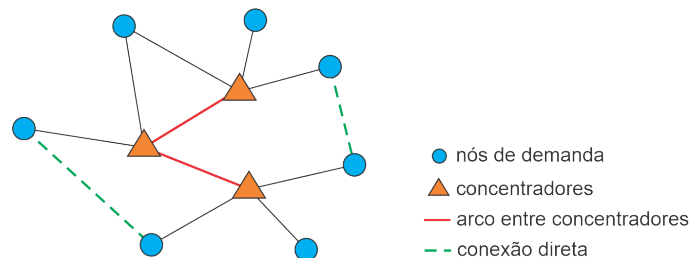
A Figura 1 mostra o exemplo de uma rede de concentradores com a estratégia de alocação múltipla, a rede de concentradores é incompleta e possui conexões diretas entre alguns nós da rede que não são concentradores.

Neste trabalho, o problema de localização de concentradores tem seu foco sob o ponto de vista do lucro, considera que a rede de concentradores é incompleta, permite conexões diretas entre nós não-concentradores e é não capacitado, ou seja, assume-se que os concentradores e arcos da rede possuem capacidade suficiente para lidar com o fluxo de demanda na rede.

O problema abordado neste estudo, tem como objetivo determinar a quantidade e a localização dos concentradores, selecionar os pares de origem e destino que serão atendidos, estabelecer os arcos que serão instalados e determinar o roteamento ótimo para cada fluxo de demanda atendido, de modo a maximizar o lucro da rede, que é dado pela diferença entre a receita total e os custos

totais de projeto e operação da rede. Assim, este problema não impõe que a demanda da rede seja completamente satisfeita e não impõe restrições sobre a topologia da rede.

Figura 1: Rede de concentradores com alocação múltipla, incompleta e com conexões diretas.



Fonte: Autor.

Potenciais aplicações deste problema surgem, por exemplo, no projeto de redes de transporte aéreo, uma vez que o lucro é um fator de impacto decisivo na consolidação e manutenção dessas redes. O objetivo, nesse caso, é encontrar uma estrutura de rede de concentradores ideal, de modo a maximizar o lucro líquido total para fornecer serviços de viagens aéreas a um conjunto de voos, levando em consideração o custo total da rede Alibeyg et al. (2016). Ele também pode ser empregado em qualquer outra área na qual o lucro seja um fator essencial na concepção da rede de concentradores.

O problema de localização de concentradores tem sido abordado por diversos autores ao longo dos anos. Campbell e O’Kelly (2012) realizaram uma ampla revisão de 25 anos de pesquisa nessa área. Neste trabalho, os autores categorizam as diversas variações do problema e examinam como elas evoluíram ao longo do tempo. Também é destacada a crescente importância de considerar fatores como a capacidade dos concentradores e as restrições na topologia das redes.

Farahani et al. (2013) complementam essa revisão ao apresentar uma análise detalhada das diferentes formulações do problema de localização de concentradores, classificando-as de acordo com aspectos como topologia, capacidade e alocação dos nós. Esse trabalho faz uma distinção entre problemas de alocação única, onde cada nó é conectado a apenas um concentrador, e de alocação múltipla, onde os nós podem ser conectados a vários concentradores. Os autores examinam a aplicabilidade de diversas técnicas de solução, incluindo procedimentos exatos, como a decomposição de Benders, e abordagens heurísticas para instâncias maiores.

O primeiro trabalho de localização de concentradores com foco na maximização do lucro foi apresentado por Alibeyg et al. (2016). Nesse trabalho, os autores consideraram a estratégia de alocação múltipla e assumiram que cada caminho de origem e destino contém no máximo dois concentradores. Eles modelaram diferentes variações do problema e testaram o desempenho de seus modelos usando o CPLEX. Em um trabalho posterior, Alibeyg et al. (2018) desenvolveram um algoritmo exato para os modelos apresentados em Alibeyg et al. (2016). Eles incorporaram a relaxação lagrangeana em um algoritmo *Branch-and-Bound* e também usaram testes de redução e enumeração parcial.

Taherkhani e Alumur (2019) apresentaram formulações para diferentes variantes do problema de localização de concentradores com maximização do lucro, incluindo versões com alocação única e múltipla, versões com e sem restrições de capacidade e também modelos que permitem conexões diretas entre os nós não concentradores da rede. As autoras utilizaram o *solver* CPLEX para analisar o desempenho computacional das formulações e compararam os resultados com os modelos propostos por Alibeyg et al. (2016).

Oliveira et al. (2022) também abordaram o problema de localização de concentradores com maximização do lucro, considerando redes incompletas. Neste trabalho, foi utilizada a decomposição de Benders com cortes Pareto-ótimos. Os resultados dos experimentos computacionais mostraram que o algoritmo proposto foi eficiente na resolução de instâncias com até 150 nós, apresentando melhor desempenho que o *solver* CPLEX em termos de tempo e qualidade das

soluções.

Em Oliveira et al. (2023), os autores propuseram metaheurísticas baseadas em *Iterated Local Search (ILS)* para lidar com o problema. Testes realizados com instâncias de até 500 nós demonstraram que os algoritmos propostos obtiveram soluções de alta qualidade, com um limite de um dia de execução. Em comparação com métodos exatos, os algoritmos se mostraram mais eficientes em instâncias maiores, atestando sua escalabilidade e eficácia para lidar com redes de grande porte.

O presente artigo tem, como objetivo principal, apresentar uma formulação alternativa para o problema de localização de concentradores com maximização do lucro e conexões diretas e compará-la com a formulação de Taherkhani e Alumur (2019). A formulação proposta é uma adaptação do modelo introduzido por Oliveira et al. (2022), originalmente desenvolvido para a versão do problema sem conexões diretas. Experimentos computacionais são realizados para analisar o desempenho da formulação, utilizando o conjunto de dados CAB com o auxílio do *solver* CPLEX. Adicionalmente, também é investigado o impacto que a permissibilidade de conexões diretas na rede tem sobre o lucro e sobre a sua configuração em relação à variante do problema cujo roteamento da demanda é feito exclusivamente por caminhos contendo concentradores.

Uma vez que o problema de localização de concentradores com maximização do lucro e conexões diretas foi recentemente proposto, este trabalho tem como contribuições principais: (i) propor uma formulação alternativa para o problema; (ii) comparar o modelo proposto com outro da literatura; (iii) analisar o impacto que a permissibilidade das conexões diretas tem sobre o lucro e a configuração da rede de concentradores.

Ressalta-se ainda que a formulação proposta neste trabalho difere daquela apresentada por Oliveira et al. (2022), pois trata da versão do problema que permite instalar conexões diretas entre nós não concentradores na rede. Enquanto a formulação original abordava a variante do problema em que tais conexões não eram permitidas. Comparada à formulação proposta por Taherkhani e Alumur (2019) para o problema em estudo, o modelo matemático apresentado neste trabalho apresenta distinções relevantes, especialmente no que se refere à representação do fluxo de demanda na rede de concentradores e à estrutura dimensional do modelo, destacando-se por utilizar um número menor de variáveis.

Este artigo está organizado da seguinte forma. Na Seção 2, o problema em questão é definido formalmente. A Seção 3 apresenta uma formulação alternativa para o problema e uma comparação com outra da literatura. A descrição dos experimentos computacionais e uma análise dos resultados obtidos são dadas na Seção 4. Por fim, na Seção 5, são feitas as considerações finais e apontamentos para trabalhos futuros.

2. Definição e Caracterização do Problema

O problema de localização de concentradores com maximização do lucro, abordado neste trabalho, possui os seguintes dados de entrada: um conjunto de nós que pertencem à rede, a demanda a ser roteada entre esses nós, a receita e o custo de transporte por cada unidade de demanda, os custos fixos de instalação de concentradores, arcos entre concentradores e conexões diretas entre nós não concentradores e, o fator de desconto constante aplicado nos arcos entre concentradores. O problema consiste em determinar a localização dos concentradores, o projeto da rede de concentradores e as rotas ótimas de fluxo com a finalidade de maximizar o lucro total da rede. A decisão de localização concentra-se na seleção de um conjunto de nós para instalar concentradores e as decisões de projeto da rede tratam das conexões entre os nós da rede que foram selecionados para serem atendidos.

As características do problema são:

- (i) Os nós não concentradores podem ser alocados a mais de um concentrador;
- (ii) Não há limitação da quantidade de concentradores, arcos entre concentradores e conexões diretas instaladas na rede;

- (iii) Não existem restrições de capacidade nos arcos e nós da rede;
- (iv) Conexões diretas entre nós não concentradores são permitidas;
- (v) Os concentradores podem ser parcialmente conectados entre si;
- (vi) A demanda não precisa ser completamente atendida e pode ser roteada através de um caminho com qualquer quantidade de concentradores e arcos entre concentradores necessários;
- (vii) Existem custos fixos de instalação de concentradores, arcos entre concentradores e nas conexões diretas, além de um fator de desconto constante aplicado aos arcos entre concentradores.

O objetivo do problema é maximizar o lucro total da rede, que é calculado pela diferença entre a receita total e o custo total. A receita total é obtida com base na quantidade de demanda atendida entre cada par de origem e destino. O custo total inclui diversas componentes: o custo variável de transporte entre cada par de origem e destino, o custo fixo de instalação de concentradores e os custos fixos de instalação dos arcos entre os concentradores e conexões diretas entre os nós não concentradores.

O cálculo do custo total de transporte entre cada par de origem e destino que não é atendido por conexões diretas é determinado pelo custo de transporte da origem até o concentrador (coleta), pelo custo de transporte nas conexões entre concentradores (transferência) e pelo custo de transporte do concentrador até o destino (distribuição). É importante notar que, neste caso, economias de escala são incorporadas no custo de transporte ao longo dos arcos entre concentradores, provenientes da consolidação da demanda nessas instalações.

3. Formulações Matemáticas

3.1. Formulação Proposta

Nesta Seção é proposta uma formulação matemática para o problema de localização de concentradores com maximização do lucro e conexões diretas, adaptada da formulação apresentada por Oliveira et al. (2022), que trata da versão do problema sob o ponto de vista do lucro, sem a permissão de conexões diretas entre os nós não concentradores.

Os parâmetros (que fazem parte dos dados de entrada do problema) e as variáveis de decisão empregados na formulação são apresentados abaixo.

Parâmetros:

- N : Conjunto de nós da rede que trocam fluxo e são potenciais candidatos a concentradores;
- r_{ij} : Receita obtida ao atender uma unidade da demanda entre os nós $i \in N$ e $j \in N$;
- w_{ij} : Demanda entre os nós $i \in N$ e $j \in N$;
- c_{ij} : Custo de transporte por unidade de demanda entre os nós $i \in N$ e $j \in N$;
- $O_i = \sum_{j \in N} w_{ij}$: Quantidade total de demanda originada no nó $i \in N$;
- s_k : Custo fixo de instalação de um concentrador no nó $k \in N$;
- g_{km} : Custo fixo de instalação de um arco entre os concentradores $k \in N$ e $m \in N$;
- α : Fator de desconto constante nos arcos entre concentradores, com $0 \leq \alpha < 1$;
- q_{ij} : Custo fixo de instalação de uma conexão direta entre os nós $i \in N$ e $j \in N$.

Variáveis de decisão:

- a_{ik} : variáveis de fluxo que representam a fração da demanda que é originada no nó $i \in N$ e acessa a rede por meio do concentrador $k \in N$;

- b_{ijm} : variáveis de fluxo que representam a fração da demanda entre os nós $i \in N$ e $j \in N$ que é atendida ao longo de uma rota na qual o último concentrador é $m \in N$;
- f_{ikm} : variáveis de fluxo que representam a quantidade de demanda originada no nó $i \in N$ que é roteada no arco entre os concentradores $k \in N$ e $m \in N$;
- h_k : variáveis binárias que indicam se um concentrador foi instalado no nó $k \in N$;
- z_{km} : variáveis binárias que indicam se existe um arco ligando os concentradores k e m ;
- e_{ij} : variável binária que indica se a demanda entre os nós $i \in N$ e $j \in N$ é atendida diretamente, sem passar por um concentrador.

Com essa notação, uma formulação de programação inteira mista para o problema de localização de concentradores com maximização do lucro e conexões diretas é dada por:

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{m \in N} r_{ij} w_{ij} b_{ijm} + \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} r_{ij} w_{ij} e_{ij} - \left(\sum_{i \in N} \sum_{k \in N} c_{ik} O_i a_{ik} \right. \\ & + \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{m \in N} c_{mj} w_{ij} b_{ijm} + \sum_{i \in N} \sum_{k \in N} \sum_{m \in N} \alpha c_{km} f_{ikm} + \sum_{k \in N} s_k h_k \\ & \left. + \sum_{k \in N} \sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} g_{km} z_{km} + \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} q_{ij} e_{ij} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{sujeito a} \quad \sum_{k \in N} a_{ik} \leq 1 \quad \forall i \in N \quad (2)$$

$$\sum_{m \in N} b_{ijm} + e_{ij} \leq 1 \quad \forall i, j \in N \quad (3)$$

$$a_{ik} \leq h_k \quad \forall i, k \in N \quad (4)$$

$$b_{ijm} \leq h_m \quad \forall i, j, m \in N \quad (5)$$

$$e_{ij} + h_i \leq 1 \quad \forall i, j \in N \quad (6)$$

$$e_{ij} + h_j \leq 1 \quad \forall i, j \in N \quad (7)$$

$$\sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} f_{imk} + O_i a_{ik} = \sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} f_{ikm} + \sum_{j \in N} w_{ij} b_{ijk} \quad \forall i, k \in N \quad (8)$$

$$f_{ikm} \leq O_i z_{km} \quad \forall i, k, m \in N, k \neq m \quad (9)$$

$$z_{km} \leq h_k \quad \forall k, m \in N, k \neq m \quad (10)$$

$$z_{km} \leq h_m \quad \forall k, m \in N, k \neq m \quad (11)$$

$$f_{ikm} \geq 0 \quad \forall i, k, m \in N \quad (12)$$

$$a_{ik} \geq 0 \quad \forall i, k \in N \quad (13)$$

$$b_{ijm} \geq 0 \quad \forall i, j, m \in N \quad (14)$$

$$e_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \in N \quad (15)$$

$$h_k \in \{0, 1\} \quad \forall k \in N \quad (16)$$

$$z_{km} \in \{0, 1\} \quad \forall k, m \in N, k \neq m \quad (17)$$

A função objetivo (1) representa o lucro total da rede, que é obtido pela diferença entre a receita total e o custo total. Os dois primeiros termos da função objetivo calculam a receita obtida com o

atendimento da demanda por rotas com e sem concentradores, respectivamente. Os três primeiros termos dentro dos parênteses representam os custos de transporte. Os três últimos termos dentro dos parênteses correspondem aos custos fixos de instalação de concentradores, de arcos entre concentradores e de conexões diretas, respectivamente. As restrições (2) asseguram que a fração total de demanda originada em cada nó $i \in N$ e que é roteada através de um concentrador é no máximo igual a 1. As restrições (3) garantem que a demanda entre cada par de nós $i, j \in N$ pode ser atendida diretamente (quando $e_{ij} = 1$) ou roteada através de caminhos contendo concentradores, mas nunca ambos. As restrições (4) e (5) indicam que o fluxo de demanda só pode ser roteado através de concentradores instalados na rede. Os conjuntos de restrições (6) e (7) garantem que, se existir uma conexão direta entre $i \in N$ e $j \in N$ (ou seja, $e_{ij} = 1$), então esses nós não podem ser concentradores. As restrições (8) se referem ao balanceamento do fluxo de demanda na rede e asseguram que ele seja devidamente roteado entre os concentradores e que a demanda gerada no nó $i \in N$ que passa pelo concentrador $k \in N$ seja corretamente distribuída entre os nós de destino. As restrições (9) determinam que a demanda originada em cada nó $i \in N$ da rede só pode ser roteada entre os concentradores $k \in N$ e $m \in N$ se existir uma conexão entre eles ($z_{km} = 1$). Os conjuntos de restrições (10) e (11) asseguram que um arco entre os concentradores $k \in N$ e $m \in N$ só pode existir se esses nós forem, de fato, concentradores instalados na rede. Por fim, as restrições (12) - (17) representam as variáveis não negativas e binárias.

3.2. Formulação da Literatura

A seguir é apresentada uma formulação da literatura, proposta por Taherkhani e Alumur (2019). Além dos parâmetros definidos anteriormente, são necessárias, para a definição do modelo, as seguintes variáveis de decisão:

- y_{ijkm} : variáveis binárias que indicam se a demanda de um par de nós $i, j \in N$ foi atendida ao longo de um caminho em que o primeiro concentrador é $k \in N$ e o último concentrador é $m \in N$.

Desse modo, a formulação proposta por Taherkhani e Alumur (2019) é dada por:

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in N} \sum_{m \in N} r_{ij} w_{ij} y_{ijkm} + \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} r_{ij} w_{ij} e_{ij} \\ & - \left(\sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in N} \sum_{m \in N} (c_{ik} + c_{mj}) w_{ij} y_{ijkm} + \sum_{i \in N} \sum_{k \in N} \sum_{m \in N} \alpha c_{km} f_{ikm} \right. \\ & \left. + \sum_{k \in N} s_k h_k + \sum_{k \in N} \sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} g_{km} z_{km} + \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} q_{ij} e_{ij} \right) \end{aligned} \quad (18)$$

sujeito a (6), (7), (9) – (12), (15) – (17)

$$\sum_{k \in N} \sum_{m \in N} y_{ijkm} + e_{ij} \leq 1 \quad \forall i, j \in N \quad (19)$$

$$\sum_{m \in N} y_{ijkm} + \sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} y_{ijmk} \leq h_k \quad \forall i, j, k \in N \quad (20)$$

$$\sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} f_{ikm} + \sum_{j \in N} \sum_{m \in N} w_{ij} y_{ijkm} = \sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} f_{ikm} + \sum_{j \in N} \sum_{m \in N} w_{ij} y_{ijmk} \quad \forall i, k \in N \quad (21)$$

$$y_{ijkm} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j, k, m \in N \quad (22)$$

Como anteriormente, a função objetivo (18) corresponde ao lucro total da rede, dado pela diferença entre a receita total e o custo total. As restrições (20) garantem que, se a demanda entre um par de nós for atendida, ela será roteada por um caminho contendo concentradores ou diretamente. O

conjunto de restrições (20) asseguram que a demanda entre os nós de origem e destino pode ser atendida apenas através de concentradores instalados na rede. As equações de balanço de fluxo são dadas pelas restrições (21), enquanto as restrições (22) representam o domínio das variáveis $y_{ijkm}, i, j, k, m \in N$.

3.3. Comparação das Formulações

Embora as duas formulações apresentadas anteriormente representem o mesmo problema, elas possuem características diferentes. A principal diferença entre elas está no modo como o fluxo de demanda na rede é modelado. Na formulação proposta, o rastreamento do fluxo de demanda que acessa a rede é realizado por meio das variáveis $a_{ik}, i, k \in N$, que possuem apenas dois índices, enquanto o rastreamento do fluxo de saída é feito através das variáveis $b_{ijm}, i, j, m \in N$, que utilizam três índices. Na formulação de Taherkhani e Alumur (2019), o fluxo da demanda entre pares de origem e destino que entra e sai da rede é identificado pelas variáveis $y_{ijkm}, i, j, k, m \in N$, que possuem quatro índices. Em relação ao cálculo do fluxo entre os nós concentradores, ambas as formulações utilizam as variáveis $f_{ikm}, i, k, m \in N$, que possuem três índices.

A Tabela 1 mostra a quantidade de variáveis e restrições presentes em cada uma das formulações em função da dimensão da instância n (quantidade de nós da rede). De acordo com esta tabela, a formulação proposta neste trabalho possui uma quantidade de variáveis menor do que a formulação da literatura. Em relação à quantidade de restrições, nota-se que ambas as formulações envolvem a mesma ordem do número de restrições.

Tabela 1: Número de variáveis e restrições das formulações em função da dimensão da instância.

Propriedades	Formulação proposta	Formulação da literatura
Variáveis binárias	$2n^2$	$n^4 + 2n^2$
Total de variáveis	$2n^3 + 3n^2$	$n^4 + n^3 + 2n^2$
Total de restrições	$2n^3 + 6n^2 - n$	$2n^3 + 5n^2 - 2n$

Fonte: Autor.

4. Experimentos Computacionais

Esta seção apresenta os experimentos computacionais realizados, com duplo objetivo: (i) avaliar o desempenho da formulação apresentada na seção anterior; e (ii) analisar o impacto que a permissão de conexões diretas tem sobre a configuração da rede de concentradores e sobre o lucro.

Os experimentos foram realizados em um computador com as seguintes especificações: processador *Intel Core i7-8700*, com 16 GB de memória RAM e sistema operacional em modo terminal *Ubuntu 22.04 LTS*. O *solver* CPLEX 22.1.1 da IBM foi utilizado, considerando sua configuração padrão, para resolver as formulações estudadas. Desse modo, não foi especificada nenhuma configuração adicional em relação aos métodos de resolução utilizados pelo *solver*, nem em relação ao uso da quantidade de núcleos e *threads* do processador (que possui 6 núcleos e 12 *threads*).

Nos testes computacionais foi utilizado o conjunto de instâncias do *Civil Aeronautics Board* (CAB). Esse conjunto de dados, introduzido por O’Kelly (1987), é baseado em dados reais da rede de transporte aéreo dos Estados Unidos em 1970. Ele consiste em 25 nós que representam cidades e fornece uma matriz com as demandas (w_{ij}) e os custos de transporte (c_{ij}) entre cada par de nós da rede. Foram consideradas diversas combinações de receitas, custos fixos de instalação de concentradores, de arcos entre concentradores e conexões diretas, além de diferentes valores para os fatores de desconto, permitindo uma análise abrangente do comportamento da formulação em diferentes cenários, como proposto em Taherkhani e Alumur (2019).

Os valores de receita por unidade de demanda (r_{ij}), custos de instalação de concentradores (s_k), custos de instalação de arcos entre concentradores (g_{km}) e custos de instalação de conexões diretas (q_{ij}), foram considerados para refletir três cenários de baixa, média e alta complexidade financeira, enquanto os fatores de desconto constante nos arcos entre concentradores (α) foram tomados no conjunto $\{0,2; 0,4; 0,6; 0,8\}$. Observe que valores menores de α refletem um maior desconto nos arcos entre concentradores e maiores valores de α acarretam em menores descontos. Por exemplo, quando $\alpha = 0,2$, significa que o custo de transporte unitário entre os concentradores $k \in N$ e $m \in N$ será igual a $\alpha c_{km} = 0,2c_{km}$, proporcionando um desconto de 80%. Esses valores para os parâmetros seguem diretamente os propostos por Taherkhani e Alumur (2019). A Tabela 2 detalha os valores utilizados.

Tabela 2: Configurações dos parâmetros CAB.

Parâmetro	Valor
Quantidade de nós	25
Receita por unidade de demanda (r_{ij})	Baixo: 1000, Médio: 1500, Alto: 2000
Custo de instalação de um concentrador (s_k)	Baixo: 50, Médio: 100, Alto: 150
Custo de instalação de um arco entre concentradores (g_{km})	Baixo: 5, Médio: 10, Alto: 15
Custo de instalação de uma conexão direta (q_{ij})	Baixo: 1, Médio: 2, Alto: 3
Fator de desconto constante (α)	0,2; 0,4; 0,6; 0,8

Fonte: Autor.

4.1. Experimento I

Esse experimento foi realizado com o objetivo de avaliar a performance da formulação proposta neste trabalho, que permite a instalação de conexões diretas na rede de concentradores.

A Tabela 3 exibe os resultados obtidos pelo CPLEX aplicado à formulação proposta com o conjunto de dados CAB. Para cada configuração dos parâmetros são exibidos o valor da função objetivo (Lucro), a porcentagem de demanda atendida na rede (Demanda Atendida), a porcentagem de demanda que foi atendida através de conexões diretas (Conexão Direta), os concentradores instalados na rede (Concentradores Instalados) e os tempos, em segundos, gastos na resolução dos problemas usando a formulação proposta (Tempo Form) e a formulação apresentada por Taherkhani e Alumur (2019) para a versão do problema com conexões diretas (Tempo Taherkhani).

Observe que, com o aumento de α , há uma redução significativa no lucro e na porcentagem de demanda atendida, bem como uma diminuição na quantidade de concentradores instalados na rede. Esse comportamento deve-se ao fato de que maiores valores de α acarretam uma diminuição do desconto nos custos operacionais dos arcos entre concentradores e reflete em cenários que tendem a economizar mais em instalação de concentradores e, consequentemente, na instalação de arcos entre concentradores. Essa redução no número de concentradores e dos arcos entre eles, acaba limitando a quantidade de demanda atendida. Para receita 2000 e custo baixo, o lucro diminui de 1166,32 para 901,10 e a porcentagem de demanda atendida reduz de 100% para 82,67%, enquanto a quantidade de concentradores instalados passa de cinco para dois, quando α varia de 0,2 para 0,8. Esse padrão é similar para diferentes níveis de receita e custo, destacando a relação inversa entre α e esses indicadores.

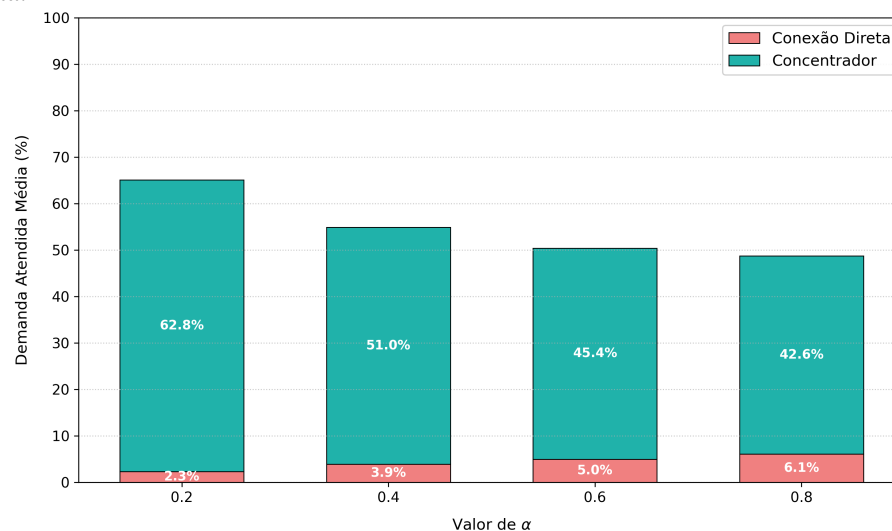
Além disso, o fator de desconto constante nos arcos entre concentradores afeta também a porcentagem de demanda atendida por conexão direta. Valores menores de α , como 0,2, estimula a instalação de arcos entre concentradores, resultando em uma menor necessidade de priorizar conexões diretas. Por outro lado, à medida que α aumenta, o custo relativo de operar arcos entre concentradores se torna mais elevado, incentivando um maior uso de conexões diretas para reduzir os custos totais. Essa relação é evidenciada na Figura 2, que mostra a porcentagem média da demanda atendida por rotas com concentrador e por conexão direta. Nota-se que há um aumento consistente no percentual de uso de conexões diretas com o crescimento de α .

Tabela 3: Resultados da formulação com conexões diretas aplicada ao conjunto de dados CAB.

Receita	Custo	α	Lucro	Demanda Atendida (%)	Conexão Direta (%)	Concentradores Instalados	Tempo Form (s)	Tempo Taherkhani (s)
2000	Baixo	0,2	1166,32	100,0	0,33	4, 7, 12, 14, 17	1076,46	11457,79
2000	Baixo	0,4	1024,43	95,33	2,0	4, 12, 14, 18	3142,62	11110,94
2000	Baixo	0,6	926,49	90,33	4,0	4, 12, 18	1001,11	11051,15
2000	Baixo	0,8	901,10	82,67	7,67	2, 21	252,37	10278,29
2000	Médio	0,2	927,44	97,33	1,67	4, 12, 17	280,22	11221,05
2000	Médio	0,4	823,75	93,0	2,0	4, 12, 18	141,38	1546,54
2000	Médio	0,6	777,74	76,0	7,0	5	90,98	143,21
2000	Médio	0,8	777,74	76,0	7,0	5	13,85	44,41
2000	Alto	0,2	748,04	97,33	1,33	4, 12, 17	104,67	3446,88
2000	Alto	0,4	694,52	69,0	4,33	20	74,51	48,56
2000	Alto	0,6	694,52	69,0	4,33	20	14,13	39,92
2000	Alto	0,8	694,52	69,0	4,33	20	10,04	39,82
1500	Baixo	0,2	669,19	94,0	0,33	4, 7, 12, 14, 17	1629,04	11001,27
1500	Baixo	0,4	538,18	85,0	2,0	4, 12, 14, 18	1971,94	11264,57
1500	Baixo	0,6	503,91	66,67	5,33	2, 4	333,45	1512,92
1500	Baixo	0,8	495,61	59,0	11,67	20	32,83	159,51
1500	Médio	0,2	439,30	84,33	1,67	4, 12, 17	166,48	2122,26
1500	Médio	0,4	399,81	55,33	5,67	20	45,68	45,27
1500	Médio	0,6	399,81	55,33	5,67	20	20,35	25,76
1500	Médio	0,8	399,81	55,33	5,67	20	11,52	25,39
1500	Alto	0,2	324,71	54,33	3,33	20	56,62	28,47
1500	Alto	0,4	324,71	54,33	3,33	20	13,56	25,74
1500	Alto	0,6	324,71	54,33	3,33	20	11,66	25,25
1500	Alto	0,8	324,71	54,33	3,33	20	10,23	25,83
1000	Baixo	0,2	213,06	49,0	1,67	4, 14, 17	352,35	623,94
1000	Baixo	0,4	181,06	31,67	5,67	20	40,47	53,94
1000	Baixo	0,6	181,06	31,67	5,67	20	15,11	14,44
1000	Baixo	0,8	181,06	31,67	5,67	20	8,33	14,14
1000	Médio	0,2	119,33	5,67	5,67	-	15,23	19,85
1000	Médio	0,4	119,33	5,67	5,67	-	9,82	19,65
1000	Médio	0,6	119,33	5,67	5,67	-	8,46	19,98
1000	Médio	0,8	119,33	5,67	5,67	-	7,19	20,16
1000	Alto	0,2	88,97	4,33	4,33	-	7,07	6,80
1000	Alto	0,4	88,97	4,33	4,33	-	6,13	6,80
1000	Alto	0,6	88,97	4,33	4,33	-	6,14	6,93
1000	Alto	0,8	88,97	4,33	4,33	-	5,67	6,70

Fonte: Autor.

Figura 2: Porcentagem média da demanda atendida por concentrador e por conexão direta.



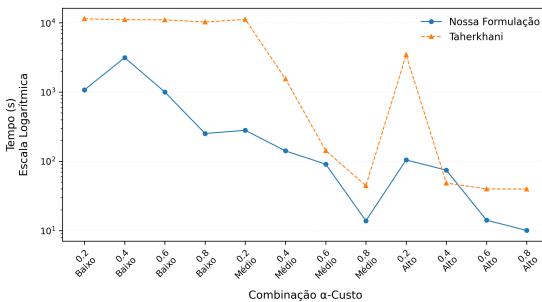
Fonte: Autor.

Em relação aos tempos de processamento, nota-se uma tendência oposta à mencionada anteriormente em relação ao valor de α . À medida α aumenta, o tempo necessário para solucionar o problema reduz. Desse modo, os casos mais dispendiosos são aqueles com um menor valor α . Como discutido acima, nesses casos a instalação de concentradores e arcos entre concentradores são mais atrativas, o que resulta em redes mais complexas e com mais conexões, acarretando em um aumento no tempo de processamento computacional necessário.

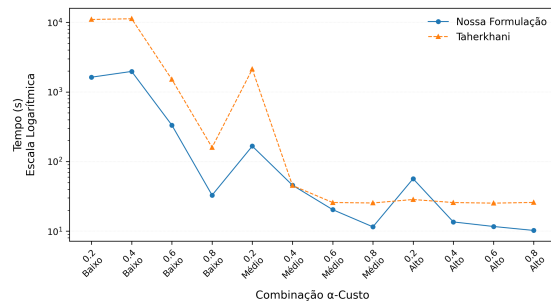
Ainda em relação aos tempos de resolução, a formulação proposta neste trabalho demonstra um desempenho superior em comparação com a formulação proposta em Taherkhani e Alumur (2019). Os tempos necessários para obter a solução ótima são significativamente menores na maioria dos cenários analisados. Por exemplo, com receita 2000, custo baixo e $\alpha = 0,2$, o tempo de processamento foi reduzido de 11.457,79 segundos na formulação de Taherkhani para 1.076,46 segundos na formulação proposta, representando uma redução de aproximadamente 90%. Um dos fatores que permite explicar essas diferenças significativas entre os tempos de resolução gastos pelo CPLEX com ambas as formulações está relacionado com a quantidade de variáveis binárias e a quantidade total de variáveis que são utilizadas em cada uma delas. Como visto na Seção 3.3, a formulação proposta neste trabalho possui uma quantidade menor de variáveis binárias e também uma quantidade total de variáveis menor do que a outra formulação, o que possibilitou o solver uma redução nos tempos de pré-processamento e resolução das instâncias.

Uma visualização gráfica dos tempos gastos utilizando cada uma das formulações é mostrada na Figura 3. Na maioria dos casos, independente dos valores de receita, custo e α , os tempos computacionais registrados para resolver as instâncias do problema foram menores utilizando a formulação proposta. Note que essa diferença dos tempos gastos entre as duas formulações tende a aumentar com o aumento da receita.

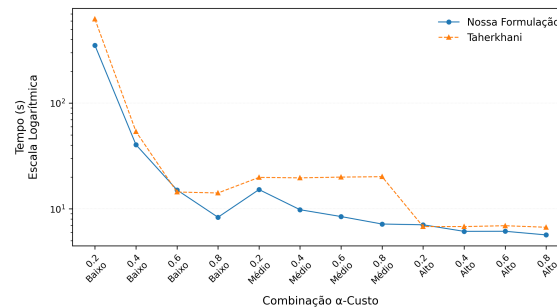
Figura 3: Tempo computacional gasto pelo CPLEX para resolver as formulações nas instâncias CAB.



(a) Receita = 2000



(b) Receita = 1500



(c) Receita = 1000

Fonte: Autor.

4.2. Experimento II

O experimento apresentado nesta seção busca avaliar o impacto das conexões diretas na configuração da rede, sua influência sobre o lucro e a eficiência computacional. Como feito anteriormente, a análise foi realizada com as diferentes combinações de receitas, custos e valores de fator de desconto nos arcos entre concentradores, como descrito na Tabela 2. Também são analisadas soluções de algumas instâncias, considerando o problema com e sem conexões diretas com o objetivo de identificar cenários em que a permissão de conexões diretas apresenta vantagens significativas na concepção da rede.

A Tabela 4 apresenta os resultados com as instâncias CAB, considerando as versões do problema com e sem conexões diretas. Os testes foram realizados com o CPLEX, aplicado à formulação proposta neste trabalho, sendo que, no caso da versão sem conexões diretas, as variáveis e_{ij} , responsáveis pela instalação de conexões diretas, foram tomadas iguais a zero. Para cada uma das versões do problema, são mostrados nesta tabela o valor do lucro, os concentradores instalados na rede e o tempo de processamento, em segundos.

Tabela 4: Resultados das versões do problema com conexões diretas e sem conexões diretas aplicadas as instâncias CAB.

Receita	Custo	α	Com conexão direta (CD)			Sem conexão direta (SCD)		
			Lucro	Concentradores	Tempo (s)	Lucro	Concentradores	Tempo (s)
2000	Baixo	0,2	1166,32	4, 7, 12, 14, 17	2357,25	1162,92	4, 7, 12, 14, 17	1076,46
2000	Baixo	0,4	1024,43	4, 12, 14, 18	2389,30	1008,46	4, 7, 12, 14, 17	3142,62
2000	Baixo	0,6	926,49	4, 12, 18	401,71	898,24	1, 4, 12, 17	1001,11
2000	Baixo	0,8	901,10	2, 21	52,80	839,40	1, 4, 12, 17	252,37
2000	Médio	0,2	927,44	4, 12, 17	300,24	911,27	4, 12, 17, 24	280,22
2000	Médio	0,4	823,75	4, 12, 18	154,13	803,73	4, 12, 17	128,63
2000	Médio	0,6	777,74	5	48,50	717,73	4, 12, 17	133,45
2000	Médio	0,8	777,74	5	12,79	690,90	18, 21	14,90
2000	Alto	0,2	748,04	4, 12, 17	145,16	738,08	4, 12, 17	64,18
2000	Alto	0,4	694,52	20	35,78	633,73	4, 12, 17	113,23
2000	Alto	0,6	694,52	20	12,68	599,18	20	15,57
2000	Alto	0,8	694,52	20	9,98	599,18	20	10,10
1500	Baixo	0,2	669,19	4, 7, 12, 14, 17	1887,45	665,79	4, 7, 12, 14, 17	1370,62
1500	Baixo	0,4	538,18	4, 12, 14, 18	1209,40	520,25	4, 12, 14, 17	2734,47
1500	Baixo	0,6	503,91	2, 4	70,41	439,14	4, 12, 17	596,49
1500	Baixo	0,8	495,61	20	32,05	424,73	4, 18	33,61
1500	Médio	0,2	439,30	4, 12, 17	180,83	426,90	4, 12, 17	152,13
1500	Médio	0,4	399,81	20	38,26	348,40	4, 17	53,09
1500	Médio	0,6	399,81	20	15,26	327,82	4, 17	25,44
1500	Médio	0,8	399,81	20	10,88	324,73	4, 18	12,15
1500	Alto	0,2	324,71	20	41,20	266,41	4, 17	72,03
1500	Alto	0,4	324,71	20	13,86	259,89	20	13,25
1500	Alto	0,6	324,71	20	10,33	259,89	20	12,98
1500	Alto	0,8	324,71	20	10,14	259,89	20	10,31
1000	Baixo	0,2	213,07	4, 14, 17	243,47	197,98	4, 12, 14, 17	461,23
1000	Baixo	0,4	181,06	20	57,51	156,90	4, 17	23,42
1000	Baixo	0,6	181,06	20	16,90	141,69	4, 17	13,31
1000	Baixo	0,8	181,06	20	9,76	132,16	4, 17	6,90
1000	Médio	0,2	119,32	—	13,56	69,02	4, 17	16,89
1000	Médio	0,4	119,32	—	9,63	65,28	17	10,01
1000	Médio	0,6	119,32	—	9,27	65,28	17	7,65
1000	Médio	0,8	119,32	—	8,60	65,28	17	5,78
1000	Alto	0,2	88,97	—	6,24	15,28	17	7,89
1000	Alto	0,4	88,97	—	5,48	15,28	17	6,78
1000	Alto	0,6	88,97	—	6,22	15,28	17	6,05
1000	Alto	0,8	88,97	—	5,48	15,28	17	5,85

Fonte: Autor.

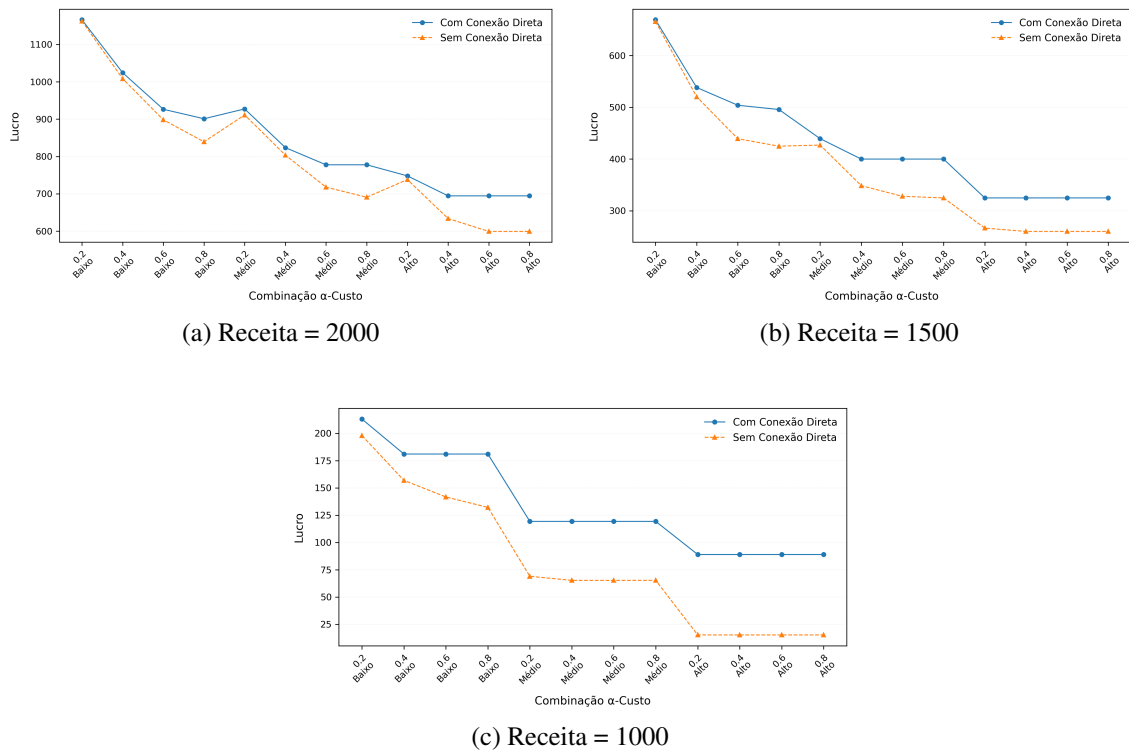
Analisando os resultados obtidos, verifica-se que, de maneira geral, a versão com conexão direta tende a produzir valores da função objetivo superiores em comparação com a versão sem conexão direta. Esse comportamento sugere que a abordagem com conexão direta é mais vantajosa para o lucro líquido da rede.

Por exemplo, para a instância com receita 2000, custo baixo e fator de desconto $\alpha = 0,4$, o lucro obtido com conexão direta foi de 1.024,43, enquanto sem conexão direta foi de 1.008,46.

Essa diferença mostra que a utilização da conexão direta proporcionou um incremento no lucro de aproximadamente 1,58%.

A Figura 4 evidencia o comportamento do lucro da rede, para cada valor de receita. Como discutido acima, os valores dos lucros obtidos com conexão direta são superiores aos obtidos sem conexão direta em todos os casos. Além disso, observa-se que essa diferença nos valores obtidos com as duas abordagens fica mais acentuada com o aumento α , indicando que a conexão direta se torna mais vantajosa para o valor da função objetivo à medida que o fator de desconto cresce (e, conseqüentemente, o desconto nos arcos entre concentradores diminui).

Figura 4: Lucro da rede de concentradores para as versões com e sem conexões diretas.



Fonte: Autor.

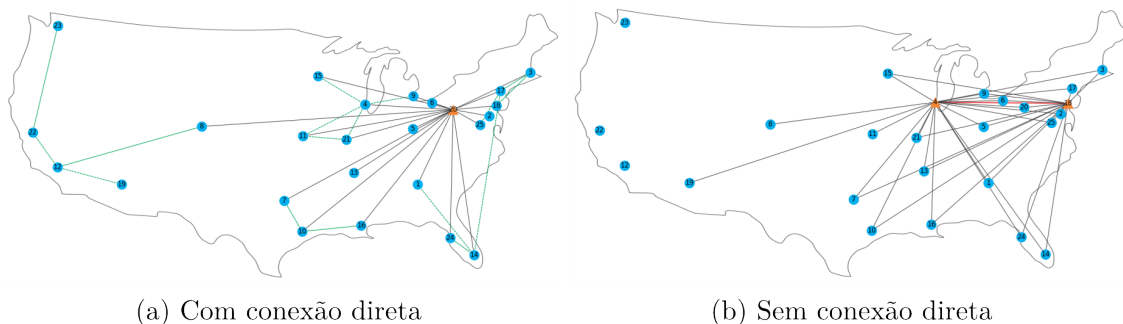
Em relação ao impacto que as conexões diretas tem sobre a estrutura da rede, nota-se na Tabela 4 que o número de concentradores instalados com a versão que permite conexões diretas geralmente é menor do que a quantidade de concentradores ativos na rede sem conexões diretas. Vê-se também que existe uma diferença considerável entre as duas abordagens em relação aos nós que são definidos como concentradores, na maioria dos casos.

Por exemplo, para a instância com receita igual a 1500, custo médio e $\alpha = 0,8$, a versão sem conexões diretas instala na rede dois concentradores e um arco entre eles, enquanto a outra variante ativa um único concentrador, conforme ilustrado na Figura 5. Nota-se que as configurações das redes são significativamente diferentes e, apesar do número de concentradores ser menor, o lucro obtido na rede com conexão direta é 23,13% maior do que o lucro associado à rede sem conexão direta. As conexões diretas permitem que mais nós sejam conectados à rede e que mais conexões entre os nós sejam instaladas, formando uma espécie de sub-rede direta. Observe na figura que os nós mais distantes dos concentradores (nós 12, 22 e 23) passaram a fazer parte da rede com a permissão das conexões diretas.

A Figura 6 exibe a configuração da rede para a instância com receita 1000, custo alto e $\alpha = 0,2$. Neste caso, em que o valor de receita é crítico e o custo é alto, sob o ponto de vista do lucro, foi mais vantajoso para a versão com conexões diretas não instalar nenhum concentrador na rede. Novamente, observamos que a estrutura das redes obtidas são distintas. Enquanto na versão

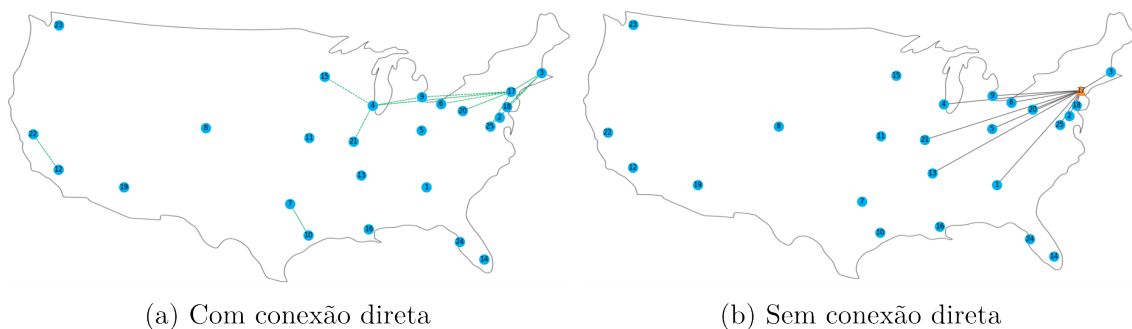
sem conexão direta os pares atendidos são aqueles que estão mais próximos do concentrador, na outra abordagem são obtidas duplas de nós que ficam desconexos com o restante da rede.

Figura 5: Configuração da rede para a instância com receita 1500, custo baixo e $\alpha = 0,8$.



Fonte: Autor.

Figura 6: Configuração da rede para a instância com receita 1000, custo alto e $\alpha = 0,2$.



Fonte: Autor.

Entretanto, em alguns casos, as redes obtidas pelas duas abordagens possuem configurações semelhantes e o aumento no valor do lucro com uso de conexões diretas é pequeno. Isso ocorre principalmente nas instâncias com maiores valores para receita e menores valores de α . A Figura 7 mostra a configuração da rede, com e sem o uso de conexões diretas, para a instância com receita 2000, custo baixo e α igual a 0,2. Observe que a configuração final da rede é praticamente idêntica, exceto pela conexão direta efetuada entre os nós 22 e 23. Neste caso, a diferença no lucro é de apenas 3,4 unidades.

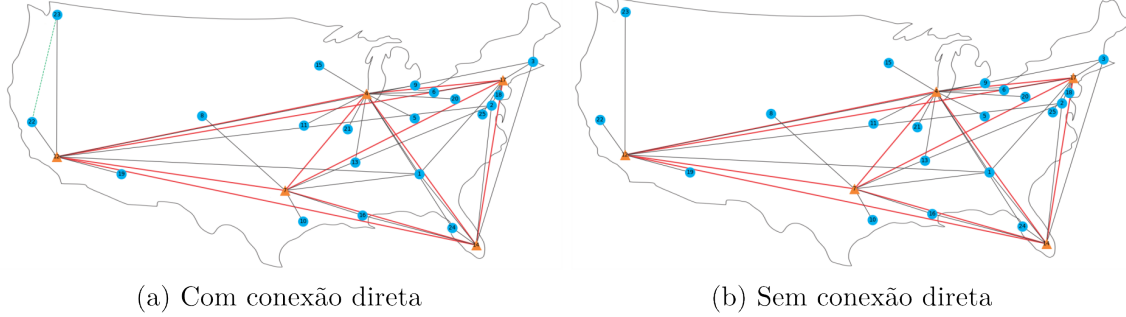
Sobre os tempos computacionais, observa-se na Tabela 4 que as execuções com conexão direta apresentam, na maioria dos casos, tempos menores ou próximos aos das execuções sem conexão direta. A Figura 8 exibe os tempos de processamento registrados pelo CPLEX para resolver as instâncias em ambas as abordagens, considerando os três valores de receita. Essa figura mostra que, em todas as categorias de receita, os maiores tempos foram registrados para resolver instâncias com custo baixo e valores menores de α (0,2 e 0,4), independente do problema permitir ou não a instalação de conexões diretas.

Adicionalmente, nota-se que para as receitas 2000 e 1500, os tempos obtidos apresentaram um comportamento similar. Os tempos gastos nas execuções com conexão direta foram menores do que os obtidos sem conexão direta, para a maioria dos cenários. Contudo, em alguns casos específicos, sobretudo nos menores valores do fator de desconto nos arcos entre concentradores, observou-se o efeito contrário.

Por outro lado, nos testes realizados com receita igual a 1000 são verificadas diferenças menos acentuadas nos tempos de processamento entre as duas abordagens. Em alguns casos, os

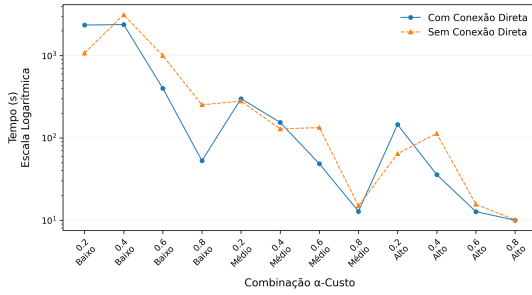
tempos sem conexão direta são menores. Isso pode ser explicado pela limitação da receita, que não estimula a instalação de concentradores, arcos entre concentradores e a ativação de conexões diretas na rede.

Figura 7: Configuração da rede para a instância com receita 2000, custo baixo e $\alpha = 0,2$.

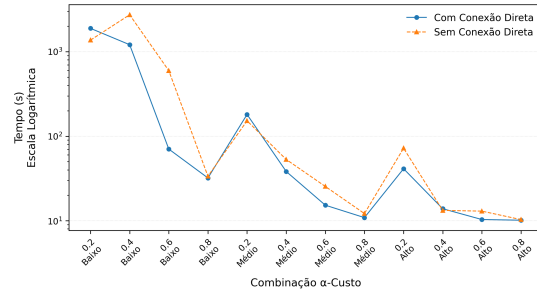


Fonte: Autor.

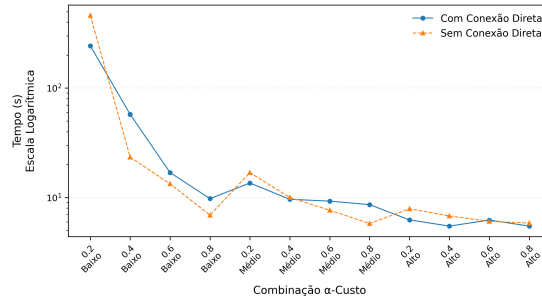
Figura 8: Tempo gasto pelo CPLEX para resolver as instâncias CAB nos problemas com conexão direta e sem conexão direta.



(a) Receita = 2000



(b) Receita = 1500



(c) Receita = 1000

Fonte: Autor.

Observe ainda que os tempos computacionais mais elevados foram obtidos com os maiores valores de receita. Ademais, devido à complexidade do problema, os tempos computacionais podem tornar-se impraticáveis, dependendo da instância utilizada.

5. Conclusões

Este artigo abordou o Problema de Localização de Concentradores com Maximização do Lucro e Conexões Diretas. Uma formulação matemática alternativa para o problema foi proposta e comparada com outra da literatura. Experimentos computacionais foram realizados para avaliar o desempenho da formulação e analisar o efeito das conexões diretas entre nós não concentradores sobre o lucro e a configuração da rede.

A principal diferença entre a formulação deste trabalho e a proposta na literatura está no modo como a demanda entre os nós de origem e destino é mapeada na rede. Enquanto a formulação da literatura utiliza um único conjunto de variáveis com quatro índices para identificar a quantidade de demanda que entra e sai da rede, a formulação apresentada utiliza dois conjuntos de variáveis, com dois e três índices, respectivamente. Além disso, a formulação proposta possui um número menor de variáveis binárias e uma quantidade total de variáveis menor do que a outra formulação.

Os resultados obtidos demonstraram que a formulação proposta possui um desempenho favorável. Os tempos computacionais despendidos pelo CPLEX com ela foram menores do que os tempos registrados com a outra formulação da literatura para resolver instâncias do conjunto de dados CAB. Um dos motivos desse ganho nos tempos computacionais está relacionado com a menor quantidade de variáveis que a formulação proposta possui.

Foi possível observar que a permissão de conexões diretas na rede de concentradores tende a aumentar o valor do lucro, em relação às redes sem conexões diretas. Além disso, na maioria dos casos analisados, as configurações das redes obtidas em ambas as abordagens são bastante distintas. Essa diferença se mostrou mais acentuada, nos casos em que foram considerados menores descontos nos arcos entre concentradores, isto é, nas instâncias em que α assumiu maiores valores. Em relação aos tempos gastos para resolver as duas versões do problema também foram investigados. Em geral, os problemas com conexões diretas registraram menores tempos computacionais, com exceção, dos casos em que α assume valores mais baixos.

Uma vez que o problema abordado é NP-difícil, a resolução da formulação proposta por métodos diretos e pelo *solver* CPLEX fica restrita a instâncias de pequeno e médio porte (redes contendo até 75 nós). Como propostas de trabalhos futuros, esta pesquisa pode ser estendida pela proposição de métodos de soluções heurísticos para lidar com instâncias de maior dimensão e pela incorporação ao problema de níveis de serviço associados ao tempo total de viagem.

Referências

- Afandizadeh, S., Ahmadinejad, M., Abdoli, S., e BIGdeli, H. Solving the hub location-routing problem for national postal network with an integrative approach. *Journal of Transportation Research*, v. 24, n. 2, p. 1–18, 2023.
- Alibeyg, A., Contreras, I., e Fernández, E. Hub network design problems with profits. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, v. 96, p. 40–59, 2016.
- Alibeyg, A., Contreras, I., e Fernández, E. Exact solution of hub network design problems with profits. *European Journal of Operational Research*, v. 266, n. 1, p. 57–71, 2018.
- Alumur, S. e Kara, B. Y. A hub covering network design problem for cargo applications in turkey. *Journal of the Operational Research Society*, v. 60, n. 10, p. 1349–1359, 2009.
- Arenales, M., Armentano, V. A., Morabito, R., e Yanasse, H. H. *Pesquisa Operacional*. Rio de Janeiro: Elsevier Brasil, 2006.

- Bollapragada, R., Li, Y., e Rao, U. S. Budget-constrained, capacitated hub location to maximize expected demand coverage in fixed-wireless telecommunication networks. *INFORMS Journal on Computing*, v. 18, n. 4, p. 422–432, 2006.
- Campbell, J. F. e O’Kelly, M. E. Twenty-five years of hub location research. *Transportation Science*, v. 46, n. 2, p. 153–169, 2012.
- Carello, G., Croce, F. D., Ghirardi, M., e Tadei, R. Solving the hub location problem in telecommunication network design: A local search approach. *Networks*, v. 44, n. 2, p. 94–105, 2004.
- Çetiner, S., Sepil, C., e Süral, H. Hubbing and routing in postal delivery systems. *Annals of Operations Research*, v. 181, n. 1, p. 109–124, 2010.
- Farahani, R. Z., Hekmatfar, M., Arabani, A. B., e Nikbakhsh, E. Hub location problems: A review of models, classification, solution techniques, and applications. *Computers and Industrial Engineering*, v. 64, n. 4, p. 1096–1109, 2013.
- Jaillet, P., Song, G., e Yu, G. Airline network design and hub location problems. *Location Science*, v. 4, n. 3, p. 195–212, 1996.
- Kim, H. e O’Kelly, M. E. Reliable p-hub location problems in telecommunication networks. *Geographical Analysis*, v. 41, n. 3, p. 283–306, 2009.
- Kuby, M. J. e Gray, R. G. The hub network design problem with stopovers and feeders: The case of federal express. *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, v. 27, n. 1, p. 1–12, 1993.
- Lin, C.-C., Lin, J.-Y., e Chen, Y.-C. The capacitated p-hub median problem with integral constraints: An application to a chinese air cargo network. *Applied Mathematical Modelling*, v. 36, n. 6, p. 2777–2787, 2012.
- O’Kelly, M. E. A quadratic integer program for the location of interacting hub facilities. *European Journal of Operational Research*, v. 32, n. 3, p. 393–404, 1987.
- Oliveira, F. A., de Sá, E. M., e de Souza, S. R. Benders decomposition applied to profit maximizing hub location problem with incomplete hub network. *Computers & Operations Research*, v. 142, p. 105715, 2022.
- Oliveira, F. A., de Sá, E. M., de Souza, S. R., e Souza, M. J. F. ILS-based algorithms for the profit maximizing uncapacitated hub network design problem with multiple allocation. *Computers & Operations Research*, v. 157, p. 106252, 2023.
- Shen, H., Liang, Y., e Shen, Z.-J. M. Reliable hub location model for air transportation networks under random disruptions. *Manufacturing & Service Operations Management*, v. 23, n. 2, p. 388–406, 2021.
- Taherkhani, G. e Alumur, S. A. Profit maximizing hub location problems. *Omega*, v. 86, p. 1–15, 2019.
- Tan, P. Z. e Kara, B. Y. A hub covering model for cargo delivery systems. *Networks*, v. 49, n. 1, p. 28–39, 2007.
- Wieberneit, N. Service network design for freight transportation: a review. *OR Spectrum*, v. 30, n. 1, p. 77–112, 2008.