

FORMULAÇÕES E MÉTODOS HEURÍSTICOS PARA O PROBLEMA DE DIMENSIONAMENTO DE LOTES COM RETORNO¹

Mateus Pereira dos Santos^a Jesus Ossian da Cunha^{a,b} * Bruno de Athayde Prata^{a,c}

^aPrograma de Pós-Graduação em Modelagem e Métodos Quantitativos
Universidade Federal do Ceará, UFC, Fortaleza-CE, Brasil

^bDepartamento de Estatística e Matemática Aplicada
Universidade Federal do Ceará, UFC, Fortaleza-CE, Brasil

^cDepartamento de Engenharia de Produção
Universidade Federal do Ceará, UFC, Fortaleza-CE, Brasil

Recebido 22/05/2024, aceito 23/05/2025

RESUMO

Neste trabalho é abordado o Problema de Dimensionamento de Lotes Capacitado com Retorno (PDLCR). No PDLCR, o objetivo é encontrar um planejamento de produção com menor custo satisfazendo demandas em um determinado horizonte de produção. Esse planejamento deve incluir a produção de novos itens ou a remanufatura de produtos, onde em cada período itens são retornados e podem ser remanufaturados, tendo em vista um limite para produção em cada período. São apresentadas três formulações, uma considerada padrão, uma formulação *multicommodity* e uma formulação fundamentada em *shortest path*. Além disso, foram desenvolvidas matheurísticas dos tipos *relax-and-fix* e *fix-and-optimize*. Testes computacionais foram realizados com finalidade de validar os métodos. Os resultados mostram que com a metodologia utilizada para adaptação das instâncias, a formulação padrão mostrou melhores resultados, considerando a quantidade de instâncias resolvidas.

Palavras-chave: Dimensionamento de lotes, Remanufatura, Matheurística.

ABSTRACT

In this work we study the Capacitated Lot Sizing Problem with Return (CLSPR). The CLSPR aims to find a lower-cost production plan satisfying demands in a given production horizon. This planning uses manufacturing and remanufacturing in production, where returned items can be remanufactured each period. A production limit is considered in each period in this problem. Our objective is to present three formulations, one considered standard, a multicommodity-based formulation, and a shortest path-based formulation. In addition, relax-and-fix and fix-and-optimize matheuristics were applied. Computational tests were carried out to validate the methods, and the results show that with the methodology used to adapt the instances, the standard formulation showed better results, considering the number of instances in which feasible solutions were obtained.

Keywords: Lot sizing, Remanufacturing, Matheuristic.

*Autor para correspondência. E-mail: jesus.ossian@dema.ufc.br
DOI: <https://doi.org/10.4322/PODes.2025.005>

¹Todos os autores assumem a responsabilidade pelo conteúdo do artigo.

1. Introdução

Segundo Karimi et al. (2003), o planejamento da produção é definido como uma atividade que considera o melhor uso de recursos de produção, a fim de satisfazer as demandas dos clientes (satisfazer os requerimentos da produção e antecipar as oportunidades de vendas) ao longo de um determinado horizonte de planejamento. Visando definir como deve ser o planejamento da produção surgiu o Problema de Dimensionamento de Lotes (PDL), sendo inicialmente denominado apenas como planejamento de produção por Modigliani e Hohn (1955) e posteriormente passando a ser denominado como PDL por Wagner e Whitin (1958).

O PDL é um problema de planejamento de produção, no qual o objetivo é determinar os períodos em que a produção deve ocorrer e as quantidades a serem produzidas para atender à demandas, minimizando os custos de produção, configuração (*setup*) e manutenção de estoques. Outros custos também podem ser considerados (Brahimi et al., 2006; Farhat et al., 2019; Bunn e Ventura, 2024).

Duas versões do problema são apresentadas na literatura, a versão capacitada e a versão não capacitada. Na versão capacitada do problema, denominada Problema de Dimensionamento de Lotes Capacitado (PDL C), é definida uma capacidade máxima de produção em cada período. Essa capacidade de produção pode ser um limite de tempo para a produção dos itens, ou a quantidade de matéria-prima disponível, ou a quantidade de mão de obra disponível. Se o problema não apresenta essas limitações de capacidade, o mesmo é tratado como um Problema de Dimensionamento de Lotes Não Capacitado (PDLNC) (Boctor, 2022).

O Problema de Dimensionamento de Lotes com Retorno (PDLR) trabalha com a proposta da reutilização de partes dos produtos defeituosos que retornam para a linha de produção e são utilizados na produção de novos produtos, e com isso se tem uma redução do custo operacional no processo de produção. No PDLR considera-se o retorno de itens que podem ser remanufaturados. Esses itens que retornam a linha de produção passam por um processo de remanufatura, tornando-se matéria-prima a ser utilizada no processo de produção. Se o PDLR possui um limite de capacidade de produção em cada período o problema passa a ser denominado Problema de Dimensionamento de Lotes Capacitado com Retorno (PDLRC).

O planejamento da produção é um tema muito importante na indústria, pois tem por finalidade reduzir desperdício de recursos, sejam eles matéria-prima ou mão de obra. Essa necessidade de reduzir custos operacionais, leva as empresas a buscar formas alternativas como a remanufatura de produtos. A remanufatura é definida como a reciclagem por meio da fabricação de novos produtos a partir de produtos em fim de uso/vida útil, ou seja, reprocessamento de produtos em fim de uso/vida útil de forma que suas qualidades sejam tão boas quanto novos nos aspectos de aparência, confiabilidade e desempenho Cho et al. (2017).

Neste trabalho são abordados modelos e métodos para o PDLRC, o qual consiste em planejar a produção de modo a suprir a demanda em cada período do horizonte de planejamento, com produtos oriundo da manufatura e/ou remanufatura. Além disso, respeitando a capacidade máxima de produção e a quantidade de itens que retornaram e estão disponíveis para a remanufatura.

As seções remanescentes deste artigo são descritas a seguir. Na Seção 2, é apresentada a revisão de literatura. Na Seção 3, são apresentadas três formulações de programação linear inteira para o problema em estudo. Na Seção 4, são apresentados os algoritmos de resolução propostos. Na Seção 5 são apresentados os experimentos computacionais, seguidos da análise e discussão dos resultados. Por fim, na Seção 6 são apresentadas as principais conclusões, seguidas de sugestões para estudos futuros.

2. Revisão da Literatura

O PDL foi inicialmente proposto por Modigliani e Hohn (1955) sob a denominação de problema de planejamento de produção. Modigliani e Hohn (1955) examinaram o problema como um problema de produção e propuseram uma solução genérica para o problema e um método gráfico

para garantir a existência de uma solução para o problema. Sob a denominação de PDL Wagner e Whitin (1958), propuseram um algoritmo dinâmico para resolver o problema de dimensionamento de lotes. No trabalho de Dzielinski e Gomory (1965), é aplicado o princípio de decomposição Dantzing e Wolfe ao problema de dimensionamento de lotes, bem como um método para criar sequências de arranjos alternativos, conforme necessário por meio do método apresentado por Wagner e Whitin (1958).

Eisenhut (1975) propõe uma heurística fundamentada na análise marginal para o problema de dimensionamento de lotes com restrição de capacidade com múltiplos itens, definindo o dimensionamento dos lotes período a período. Lambrecht e Vanderveken (1979) propõem uma heurística eficiente para o problema de planejamento de produção fundamentada por Eisenhut (1975). Eppen e Martin (1987) abordam em seu trabalho formulações alternativas para o problema de dimensionamento de lotes capacitado com multi-itens e mostram que a relaxação linear das formulações propostas é efetiva na geração de limitantes.

Chen e Thizy (1990) realizam um comparativo entre o método de relaxação lagrangeana e os métodos de relaxação alternativos para o problema de dimensionamento de lotes capacitado com multi-itens, esse comparativo é feito utilizando relaxação linear, geração de colunas e o método do subgradiente. Drexler e Kimms (1997) apresentam uma revisão da literatura com foco em abordagens dinâmicas, capacitadas e determinísticas.

Richter e Sombrutzki (2000) consideraram a variante com remanufatura. O método apresentado por Wagner e Whitin (1958) foi adaptado para o problema de planejamento de produção com remanufatura. Em Richter e Weber (2001) é apresentada uma extensão do trabalho de Richter e Sombrutzki (2000), na qual são considerados os custos de *setup* e custo de remanufatura ao PDLR.

Em Karimi et al. (2003) e Brahimi et al. (2006) são apresentadas revisões da literatura do PDLR e PDL, nas quais também são apresentados métodos exatos e heurísticos para obtenção da solução. Teunter et al. (2006) propõe um algoritmo de programação dinâmica e três métodos heurísticos para o PDLR. Além disso, o problema é abordado com custo único de *setup* e custos de *setup* diferentes, para o caso de custo único foi proposto um algoritmo de programação dinâmica. Para ambos os casos, são sugeridas modificações nas heurísticas *Silver Meal*, *Least Unit Cost* e *Part Period Balancing*. Schulz (2011) propõe uma heurística *Silver Meal* ao problema de dimensionamento de lote dinâmico com um item único com retornos e remanufatura adicionando duas etapas de melhorias diferentes das apresentadas em Teunter et al. (2006).

Zhang et al. (2012) propõem um método aproximativo baseado em relaxação lagrangeana para o problema de dimensionamento de lotes com capacidade na cadeia de abastecimento de circuito fechado, nessa abordagem é considerado custo de configuração, retorno de produtos e remanufatura. Em Retel Helmrich et al. (2014), é apresentada uma formulação de caminho mínimo para o problema de dimensionamento de lotes com retorno, além disso desigualdades usadas no problema clássico são adaptadas.

Sifaleras et al. (2015) propõem um algoritmo de busca em vizinhança para o problema de dimensionamento de lotes econômico com retorno de produtos e recuperação. Cunha e Melo (2016) apresentam uma formulação estendida *multicommodity* e uma formulação baseada em *Wagner-Whitin*, que faz uso da adição a priori de desigualdades válidas recentemente descritas no espaço de variáveis originais. Também foi proposta uma nova medida heurística dinâmica baseada na estrutura de custos para determinar automaticamente o tamanho de uma versão parcial da formulação baseada em *Wagner-Whitin*.

Roshani et al. (2017) propõem uma heurística *relax-and-fix* para o problema de dimensionamento de lote dinâmico capacitado em sistemas integrados de manufatura/remanufatura. Cunha et al. (2019) utilizam duas abordagens construtivas aplicadas ao problema de dimensionamento de lotes capacitado com multi-itens e remanufatura, uma heurística de geração de coluna seguida por um mecanismo de reparo de *Programação Linear (LP)/MIP*, e um método *relax-and-fix*. Um procedimento de busca local de *fix-and-optimize* também é aplicado para melhorar a qualidade das

soluções obtidas pelas técnicas construtivas.

Na Tabela 1 são apresentadas de forma resumida as principais contribuições de estudos sobre o problema de dimensionamento de lotes. Além disso, a última linha da Tabela 1 contém as características e contribuições deste trabalho.

Tabela 1: Revisão bibliográfica.

Referência	Estratégia	Capacitado	Não Capacitado	Multi Nível	Remanufatura	Único Item
Wagner e Whitin (1958)	Heurística	-	X	-	-	X
Dzielinski e Gomory (1965)	Método exato e Heurística	-	X	-	-	X
Eisenhut (1975)	Heurística	X	-	-	-	-
Lambrecht e Vanderveken (1979)	Heurística	X	-	-	-	-
Eppen e Martin (1987)	Método exato	X	-	-	-	-
Chen e Thizy (1990)	Método exato e Heurística	X	-	-	-	-
Drexl e Kimms (1997)	Revisão	X	-	X	-	-
Richter e Sombrutzki (2000)	Heurística	-	X	-	X	X
Richter e Weber (2001)	Heurística	-	X	-	X	X
Karimi et al. (2003)	Revisão	X	X	-	-	X
Brahimi et al. (2006)	Revisão	X	X	-	-	X
Teunter et al. (2006)	Algoritmo Dinâmico e Heurística	-	X	-	X	X
Schulz (2011)	Heurística	-	X	-	X	X
Zhang et al. (2012)	Heurística	X	-	-	X	X
Retel Helmrich et al. (2014)	Método exato	-	X	-	X	X
Sifaleras et al. (2015)	Matheurística	-	X	-	X	X
Cunha e Melo (2016)	Método exato e Heurística	-	X	-	X	X
Roshani et al. (2017)	Matheurística	X	-	-	X	-
Cunha et al. (2019)	Matheurística	X	-	-	X	-
Piñeyro e Viera (2022)	Método exato	-	X	-	X	X
Bunn e Ventura (2024)	Método exato e Heurística	X	-	-	-	-
Este trabalho	Método exato e Heurística	X	-	-	X	X

Fonte: Elaborada pelo autor.

3. Definição do Problema

O PDLCR pode ser descrito formalmente como segue. Seja $T = \{1, \dots, n\}$ o conjunto de períodos de tempo que definem o horizonte de planejamento para produção de um item. Em cada período $t \in T$ existe uma demanda d_t a ser atendida, um custo fixo de produção f_t , um custo de produção p_t , e um custo de estoque de itens produzidos h_t . Além disso, existe a quantidade r_t de itens que retornam a linha de produção no período t , pr_t o custo por remanufatura no período

t , fr_t o custo de preparação para remanufatura (*setup*) no período t , e hr_t o custo de estoque de itens que retornaram e ainda não foram remanufaturados no final do período t onde $t \in T$. Nesse problema é considerada uma capacidade máxima única, C , de itens produzidos e remanufaturados em cada período. O valor de C é expresso pelo número máximo de itens a serem produzidos e remanufaturados.

O PDLCR consiste em determinar as quantidades a serem produzidas e remanufaturadas em cada período, atendendo a demanda de cada período, enquanto se minimiza os custos de manufatura/remanufatura, estoque e *setup*, respeitando a capacidade de produção em cada período. O Problema de Dimensionamento de Lotes Capacitado (PDLC) é uma versão do PDLCR sem retorno e remanufatura. O PDLC é um problema *NP-Difícil*, Brahimi e Dauzère-Pérès (2015). Assim, por tratar-se de uma generalização do PDLC, o PDLCR é *NP-Difícil*.

Nesse trabalho são consideradas três formulações matemáticas para o PDLCR, a serem apresentadas a seguir.

3.1. Formulação Padrão

A formulação padrão é uma adaptação do modelo proposto por Cunha e Melo (2016) para o problema de dimensionamento de lotes capacitado econômico com remanufatura. As variáveis da formulação são apresentadas com segue:

- x_t , quantidade de itens produzidos por manufatura no período t .
- xr_t , quantidade de itens produzidos por remanufatura no período t .
- s_t , quantidade do estoque no período t de itens produzido (manufatura/remanufatura).
- sr_t , quantidade do estoque dos itens de retorno não remanufaturados até final do período t .
- $y_t = \begin{cases} 1, & \text{se existe produção por manufatura no período } t. \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$
- $yr_t = \begin{cases} 1, & \text{se existe produção por remanufatura no período } t. \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

Os dados a serem considerados no problema foram apresentados na Seção 3.

$$\min \sum_{t \in T} (h_t s_t + p_t x_t + f_t y_t) + \sum_{t \in T} (hr_t sr_t + pr_t xr_t + fr_t yr_t) \quad (1)$$

sujeito a:

$$s_{t-1} + x_t + xr_t = d_t + s_t, \forall t \in T, \quad (2)$$

$$sr_{t-1} + r_t = xr_t + sr_t, \forall t \in T, \quad (3)$$

$$x_t \leq \min \left\{ \sum_{j=t}^n d_j, C \right\} y_t, \forall t \in T, \quad (4)$$

$$xr_t \leq \min \left\{ \sum_{i=1}^t r_i, \sum_{j=t}^n d_j, C \right\} yr_t, \forall t \in T, \quad (5)$$

$$x_t + xr_t \leq C, \forall t \in T, \quad (6)$$

$$s_0 = s_n = sr_0 = 0, \quad (7)$$

$$x_t, xr_t, s_t, sr_t \geq 0, \forall t \in T, \quad (8)$$

$$y_t, yr_t \in \{0, 1\}, \forall t \in T. \quad (9)$$

A função objetivo (1) consiste em minimizar os custos de manufatura/remanufatura, os custos fixo de manufatura/remanufatura e os custos de estoques. Os conjuntos de restrições (2) e (3) são restrições de equilíbrio de estoque para a manufatura e remanufatura, respectivamente.

Os conjuntos de restrições (4) e (5) limitam o valor das variáveis x_t e xr_t em cada período t , respectivamente. O conjunto de restrições (6) definem um limite superior para produção em cada período t . O conjunto de restrições do tipo (7) impõe que o estoque nos períodos 0 e n e o estoque de itens de retorno não-manufaturados no período 0 são iguais à zero. Os conjuntos de restrições (8) e (9) definem o domínio em que as variáveis estão definidas.

3.2. Formulação Shortest Path

A formulação baseada em *Shortest Path* foi proposta por Eppen e Martin (1987) para o problema de dimensionamento de lotes capacitado. O *shortest path* é resolvido com uma rede de fluxo utilizando variáveis z_{ij} , $1 \leq i \leq j \leq n$, no qual uma unidade de fluxo é enviada. Essa formulação foi aplicada ao problema de dimensionamento de lotes econômico com remanufatura por Retel Helmrich et al. (2014) com o objetivo de obter limites inferiores melhores.

Seja $r_{i,j} = \sum_{k=i}^j r_k$ para $1 \leq i \leq j \leq n$ onde r_t para $t \in T$ são as quantidades dos itens retornados em cada período. Seja z_{ij}^{sp} a variável que define a fração da demanda do período i até o período j que é atendida pelos itens produzidos em i e z_{ij}^{sr} a variável que define fração da demanda do período i até o período j que é atendida pelos itens remanufaturados no período i , onde $1 \leq i \leq j \leq n$.

Seja z_{ij}^r a variável que define a fração de itens que retornam do período i até o período j e que são remanufaturados em j , e l_t a variável que define a fração dos itens que retornam entre o período t e o período n que são armazenados no final do estoque dos itens de retorno do período n . Considere ainda as variáveis binárias $y_t \in \{0, 1\}$ e $yr_t \in \{0, 1\}$, as quais definem se ocorreu ou não produção e remanufatura respectivamente em cada período $t \in T$.

Considere os seguintes custos a serem utilizados na formulação *shortest path*. C_{ij}^{sp} são os custos total de produção somados com o custo de estoque, usando exclusivamente produção por manufatura para satisfazer a demanda nos períodos $i, i+1, \dots, j$. De forma similar, se a demanda nos períodos $i, i+1, \dots, j$ é satisfeita apenas por produtos que são remanufaturados no período i , C_{ij}^{sr} são os custos variáveis totais de remanufatura somados os custos de manutenção incorridos desde o momento em que esses produtos são remanufaturados até que sejam usados para satisfazer a demanda. Além disso, se todos os itens que retornarem nos períodos $i, i+1, \dots, j$ são remanufaturados no período j , C_{ij}^r são os custos totais de estoque incorridos desde o momento em que esses itens retornados se tornam disponíveis até que sejam remanufaturados. C_t^l são os custos para manter os itens que retornaram no período t em estoque até o final do horizonte do problema sem remanufatura-los. Mais detalhes sobre esses custos podem ser obtidos em Retel Helmrich et al. (2014).

$$C_{ij}^{sp} = p_i d_{ij} + \sum_{t=i}^{j-1} h_t d_{t+1,j}, \text{ para } 1 \leq i \leq j \leq n, \quad (10)$$

$$C_{ij}^{sr} = pr_i d_{ij} + \sum_{t=i}^{j-1} h_t d_{t+1,j}, \text{ para } 1 \leq i \leq j \leq n, \quad (11)$$

$$C_{ij}^r = \sum_{t=i}^{j-1} hr_t r_{it}, \text{ para } 1 \leq i \leq j \leq n, \quad (12)$$

$$C_t^l = \sum_{j=t}^n hr_j d_{tj}, \text{ para } 1 \leq t \leq n, \quad (13)$$

Após a definição das constantes e variáveis, podemos escrever a formulação *shortest path*

para o problema de dimensionamento de lotes com retorno da seguinte forma:

$$\min \sum_{t=1}^n (f_t y_t + f_{r_t} y_{r_t} + C_t^l l_t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n (C_{ij}^{sp} z_{ij}^{sp} + C_{ij}^{sr} z_{ij}^{sr} + C_{ij}^r z_{ij}^r) \quad (14)$$

sujeito a:

$$\sum_{j=1}^n (z_{1j}^{sp} + z_{1j}^{sr}) = 1, \quad (15)$$

$$\sum_{i=1}^{t-1} (z_{i,t-1}^{sp} + z_{i,t-1}^{sr}) = \sum_{j=t}^n (z_{tj}^{sp} + z_{tj}^{sr}), \text{ para } 2 \leq t \leq n, \quad (16)$$

$$\sum_{j=t}^n z_{tj}^{sp} \leq y_t, \text{ para } 1 \leq t \leq n, \quad (17)$$

$$\sum_{j=t}^n z_{tj}^{sr} \leq y_{r_t}, \text{ para } 1 \leq t \leq n, \quad (18)$$

$$\sum_{j=1}^n z_{1j}^r + l_1 = 1, \quad (19)$$

$$\sum_{i=1}^t z_{i,t-1}^r = \sum_{j=t}^n z_{tj}^r + l_t, \text{ para } 2 \leq t \leq n, \quad (20)$$

$$\sum_{i=1}^t z_{it}^r \leq y_{r_t}, \text{ para } 1 \leq t \leq n, \quad (21)$$

$$\sum_{i=1}^{t+1} r_{it} z_{it}^r = \sum_{j=t}^n d_{tj} z_{tj}^{sr}, \text{ para } 1 \leq t \leq n, \quad (22)$$

$$\sum_{t=i}^n d_{ti} z_{ti}^{sp} \leq d_{tn} y_t^p, \text{ para } 1 \leq t \leq n, \quad (23)$$

$$\sum_{t=i}^n d_{ti} z_{ti}^{sr} \leq d_{tn} y_t^r, \text{ para } 1 \leq t \leq n, \quad (24)$$

$$z_{ij}^{sp} \geq 0, z_{ij}^{sr} \geq 0, z_{ij}^r \geq 0, \text{ para } 1 \leq i \leq j \leq n, \quad (25)$$

$$0 \leq l \leq 1, y, y_r \in \{0, 1\}^n. \quad (26)$$

A equação (14) denota a função objetivo que queremos minimizar. Os conjuntos de restrições (15) a (18), são as restrições de caminho mais curto para o processo de produção(remanufatura), onde os conjuntos de restrições (15) e (16) são de conservação de fluxo. Os conjuntos de restrições (17) e (18) são referente ao *setup* manufatura e remanufatura, ou seja, só é produzido se a máquina da linha de produção é utilizada. Os conjuntos de restrições (19) a (21) são restrições de caminho mínimo para o retorno dos itens a serem remanufaturados, com (19) e (20) sendo os conjuntos de restrições de conservação de fluxo para o retorno de itens e (21) sendo o conjunto de restrições de *setup*. O conjunto de restrições (22) é responsável por conectar as variáveis z_{ij}^{sr} e z_{ij}^r no fluxo de remanufatura e retorno de itens. O conjunto de restrições (23) e (24) limita a manufatura e remanufatura em cada período. O conjunto de restrições (25) e (26) são restrições que definem o domínio das variáveis do modelo.

Nesta proposta adaptamos a formulação *shortest path* proposta por Retel Helmrich et al. (2014) para o problema de dimensionamento de lotes com retorno, essa adaptação teve por finalidade gerar uma formulação *shortest path* para o PDLCR. Além disso, as quantidades produzidas por manufatura e remanufatura são obtidos de acordo com as equações (27) e (28), descritas no

trabalho de Retel Helmrich et al. (2014).

$$x_t = \sum_{k=t}^n d_{tk} z_{tk}^{sp} \text{ para } 1 \leq t \leq n \quad (27)$$

$$xr_t = \sum_{k=t}^n d_{tk} z_{tk}^{sr} \text{ para } 1 \leq t \leq n \quad (28)$$

Desta forma, podemos adicionar a restrição de capacidade (29), obtendo a formulação *shortest path* para o PDLCR.

$$\sum_{k=t}^n d_{tk} z_{tk}^{sp} + \sum_{k=t}^n d_{tk} z_{tk}^{sr} \leq C, \text{ para } 1 \leq t \leq n \quad (29)$$

3.3. Formulação Multicommodity

A formulação *multicommodity* foi aplicada com sucesso em diversos problemas de planejamento da produção Pochet e Wolsey (2006). Neste trabalho adaptamos a formulação *multicommodity* proposta em Cunha e Melo (2016) para o problema de dimensionamento de lotes com retorno gerando assim uma formulação *multicommodity* para o PDLCR.

Seja w_{kt}^p a variável que define a quantidade de itens produzidos no período k para satisfazer a demanda do período t , w_{kt}^r a variável que define a quantidade de itens remanufaturados no período k para satisfazer a demanda do período t , e o_{kt}^r a variável que define a quantidades de itens retornados no período k que serão remanufaturados no período t , onde temos que $1 \leq k \leq t \leq n$.

Considere as seguintes constantes as serem utilizadas na formulação *multicommodity*:

$$CP_t = p_t + \sum_{j=t}^n h_j, \text{ para } 1 \leq t \leq n \quad (30)$$

$$CR_t = pr_t + \sum_{j=t}^n h_j - \sum_{j=t}^n hr_j, \text{ para } 1 \leq t \leq n \quad (31)$$

$$K = \sum_{t=1}^n [hr_t \cdot r_{1t} - h_t \cdot d_{1t}], \text{ para } 1 \leq t \leq n \quad (32)$$

A constante CP_t denota o custo de produção por manufatura somado com o custo de estoque total do período t ao período n . CR_t é o custo dos produtos obtidos por remanufatura somado com o custo de estoque total do período t ao período n , além disso, é subtraída soma dos custos de estoque de produtos retornados do período t ao período n . A constante K é o somatório da diferença do valor total de estoque de produtos retornados até o período t com o valor de estoque das demandas que devem ser atendidas até o período t .

As equações (30), (31) e (32) são obtidas através de manipulações algébricas feitas na função objetivo da formulação padrão, onde são utilizado as equações $s_t = \sum_{k=1}^t x_k + \sum_{k=1}^t xr_k - d_{1t}$ e $sr_t = r_{1t} - \sum_{k=1}^t xr_k$, que denotam a quantidade de itens no estoque de produção e estoque para a remanufatura. Os detalhes sobre as manipulações algébricas para se gerar as equações (30), (31) e (32) são encontrados no trabalho de Cunha e Melo (2016).

Após a definição das constantes e variáveis, podemos definir a formulação *multicommodity* para o PDLCR.

$$\min \sum_{t=1}^n (CP_t x_t + f_t y_t) + \sum_{t=1}^n (CR_t x r_t + f r_t y r_t) + K \quad (33)$$

sujeito a:

$$\sum_{k=1}^t (w_{kt}^p + w_{kt}^r) \geq d_t, \text{ para } 1 \leq t \leq n, \quad (34)$$

$$\sum_{k=1}^t o_{kt}^r = \sum_{k=t}^n w_{tk}^r, \text{ para } 1 \leq t \leq n, \quad (35)$$

$$\sum_{t=k}^n o_{kt}^r \leq r_k, \text{ para } 1 \leq k \leq t \leq n, \quad (36)$$

$$w_{kt}^p \leq d_t y_k, \text{ para } 1 \leq k \leq t \leq n, \quad (37)$$

$$w_{kt}^r \leq \min \{r_{1k}, d_t\} y r_k, \text{ para } 1 \leq k \leq t \leq n, \quad (38)$$

$$o_{kt}^r \leq r_k y r_t, \text{ para } 1 \leq k \leq t \leq n, \quad (39)$$

$$x_t = \sum_{k=t}^n w_{tk}^p \text{ para } 1 \leq t \leq n, \quad (40)$$

$$x r_t = \sum_{k=t}^n w_{tk}^r \text{ para } 1 \leq t \leq n, \quad (41)$$

$$x_t + x r_t \leq C, \text{ para } 1 \leq t \leq n, \quad (42)$$

$$w^p, w^r, o^r \in \mathbb{R}_+^{n \times n}, \quad (43)$$

$$y, y r \in \{0, 1\}^n. \quad (44)$$

A função objetivo (33) consiste em minimizar o custo total. O conjunto de restrições (34) garante que a demanda de cada período seja atendida por produção/remanufatura até o período t . O conjunto de restrições (35) associa os itens retornados para serem remanufaturados em um dado período com a real quantidade remanufaturada naquele período. O conjunto de restrições (36) garante que a quantidade a ser remanufaturada não pode exceder a quantidade de itens retornados. Os conjuntos de restrições (37)-(39) são restrições que limitam a quantidade de produção e remanufatura para atender a demanda do período t . Os conjuntos de restrições (40)-(41), representam a conexão das variáveis do *multicommodity* com as variáveis do problema original. Os conjuntos de restrições (42) são responsáveis por limitar a produção/remanufatura em cada período. Os conjuntos de restrições (43)-(44) definem o domínio em que as variáveis estão definidas.

4. Algoritmos de Resolução Propostos

Nesta seção apresentaremos as duas heurísticas utilizadas na resolução do PDLCR.

4.1. Relax-and-Fix

A heurística *Relax-and-Fix* (RF) consiste em uma abordagem de solução baseada em métodos exatos Wolsey (1998). O método *Relax-and-Fix* é um método iterativo, no qual um subproblema é resolvido em uma dada iteração k considerando subconjuntos, que são especificados de acordo com a estrutura do problema. Por exemplo, considere os seguintes subproblemas associados as variáveis de um problema de programação linear inteira.

1. Conjunto de variáveis com valores tratados como números inteiro.
2. Conjunto de variáveis com valores fixados em valores inteiro.

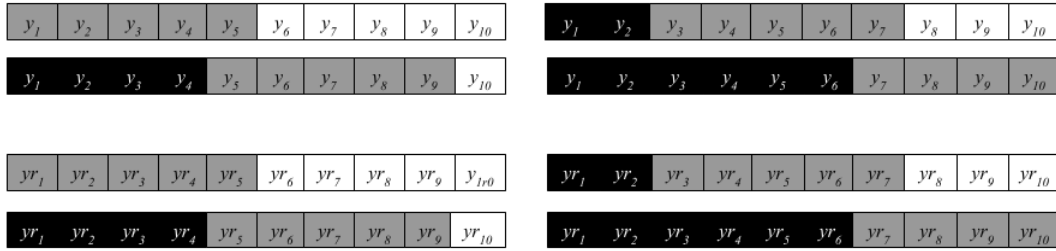
3. Conjunto de variáveis tratadas como números reais.

Seja $T = \{1, 2, \dots, n\}$ o conjunto associado aos períodos do problema em questão. Seja $S_1, S_2, \dots, S_p$ os p 's subconjuntos de T que são partições do conjunto T , ou seja, $S_i \subset T$ para $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, $T = \cup_{l=1}^p S_l$ e $S_i \cap S_j = \emptyset$ para todo $i, j \in \{1, 2, \dots, p\}$, $i \neq j$. Por exemplo, para o conjunto $T = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, são exemplos de partições de T , $S_1 = \{1, 3\}$ e $S_2 = \{2, 4, 5\}$.

A heurística RF inicializa tratando as variáveis da partição S_1 do problema como números inteiro, enquanto as variáveis das outras $p - 1$ partições são tratadas como contínuos. Ao término dessa etapa fixa-se as variáveis da partição S_1 na solução encontrado para o subproblema, e escolhe-se uma nova partição, no caso S_2 , para ter suas variáveis tratadas como números inteiro, e as outras $p - 2$ partições tem suas variáveis tratadas como contínuas. O processo se encerra quando todas as partições tiverem sido resolvidas como números inteiro, ou seja, tivermos resolvido o p -ésimo subproblema com valor inteiro ou algum subproblema for infactível (Ribeiro, 2017).

No problema abordado neste trabalho, existem dois grupos de variáveis inteiras $\{0, 1\}$ (binárias), $y_t, yr_t \in \{0, 1\}$, para $t = 1, \dots, n$. A variável y_t relacionada a produção por manufatura e a variável yr_t relacionada a produção por remanufatura. A estratégia utilizada na heurística RF é similar à apresentada no trabalho de Toledo et al. (2015), na qual, utiliza sobreposição de partições. A Figura 1 apresenta partições com tamanho igual a 5 e fixa o valor de duas variáveis após a resolução em cada iteração. A Figura 1 ilustra a aplicação das heurísticas apenas para variável de produção y , mas tais heurísticas foram aplicadas para y e yr , seguindo a mesma lógica.

Figura 1: Exemplo do funcionamento do RF.



Fonte: Elaborada pelo autor.

No exemplo apresentado na Figura 1, as variáveis de cor preta tem seu valor fixado em $\{0, 1\}$, as variáveis de cor cinza são tratadas como $\{0, 1\}$ e as variáveis de cor branca são tratadas como $[0, 1]$. Na primeira iteração apenas o conjunto de variáveis $\{y_1, \dots, y_5\}$ ($\{yr_1, \dots, yr_5\}$) é tratado como $\{0, 1\}$ e o conjunto das variáveis definidas $\{y_6, \dots, y_{10}\}$ ($\{yr_6, \dots, yr_{10}\}$) é tratado como $[0, 1]$. Na segunda iteração o conjunto das variáveis $\{y_1, y_2\}$ ($\{yr_1, yr_2\}$) tem seus valores fixados nos valores obtidos na iteração anterior, as variáveis $\{y_3, \dots, y_7\}$ ($\{yr_3, \dots, yr_7\}$) são selecionadas para serem tratadas como variáveis $\{0, 1\}$ e as variáveis $\{y_8, \dots, y_{10}\}$ ($\{yr_8, \dots, yr_{10}\}$) são tratadas como relaxadas, ou seja, $[0, 1]$. O procedimento continua progressivamente ao longo do horizonte de planejamento até se obter uma solução $\{0, 1\}$ ou algum subproblema ser inviável.

O algoritmo 1 descreve como são geradas as partições a serem utilizadas nas heurísticas. Como entrada esse algoritmo tem n , o número de períodos do horizonte de planejamento, a quantidade de períodos que cada partição deve conter, denotada por tam_part , e quantos períodos serão distintos em partições que foram geradas imediatamente em sequência, essa quantidade de períodos é denotado por tam_fix .

Considere o conjunto de períodos e as seguintes partições:

$$T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$S_1^0 = \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ e } S_2^0 = \{6, 7, 8, 9, 10\}$$

Algoritmo 1: Gera partições**Entrada:** n, tam_part, tam_fix **Resultado:** partições de T

```

1 início
2    $sair \leftarrow False$ 
3    $ind \leftarrow 1$ 
4    $S \leftarrow \emptyset$ 
5   while  $sair = False$  do
6     if  $ind + tam\_fix > n$  then
7       insira  $\{ind, \dots, n\}$  em  $S$ 
8        $sair \leftarrow True$ 
9     else
10      insira  $\{ind, \dots, ind + tam\_part\}$  em  $S$ 
11       $ind \leftarrow ind + tam\_fix$ 

```

$$S_1^1 = \{1, 2\}, S_2^1 = \{3, 4, 5, 6, 7\} \text{ e } S_3^1 = \{8, 9, 10\}$$

Nesse exemplo, o $tam_part = 5$ e $tam_fix = 2$. As partições S_1^0 e S_2^0 foram geradas na primeira iteração, em sequência, são gerados S_1^1 , S_3^1 e S_3^1 , onde S_1^1 terá seus valores fixo em inteiros, S_2^1 terá seus elementos tratados como inteiros e S_3^1 terá seus valores tratados como contínuos.

O algoritmo 2 se refere ao método RF utilizado. O método apresentado no Algoritmo 2 inicia pela geração do conjunto de p partições na linha 2. Da linha 3 a linha 13 ele percorre todas as partições, onde da linha 5 a linha 13 é definido quem são as variáveis tratadas como $\{0, 1\}$, quem são as variáveis fixadas em 0 ou 1, e quem são as variáveis tratadas como $[0, 1]$. Na linha 13 o problema associado é resolvido e é retornado o valor objetivo (sol), y e yr encontrados, associados a cada iteração.

Algoritmo 2: Relax and fix**Entrada:** $k = 0, y^k, yr^k$ **Resultado:** sol (solução viável ou inviável)

```

1 início
2    $particoes \leftarrow \text{gera\_particoes}(n, tam\_part, tam\_fix)$ 
3   for  $subset \in particoes$  do
4     for  $i = 1, 2, \dots, n$  do
5       if  $i > \max(subset)$  then
6          $y_i^{k+1}, yr_i^{k+1} \in [0, 1]$ 
7       else
8         if  $i \in subset$  then
9            $y_i^{k+1}, yr_i^{k+1} \in \mathbb{B}$ 
10        else
11           $y_i^{k+1} \leftarrow y_i^k$ 
12           $yr_i^{k+1} \leftarrow yr_i^k$ 
13    $sol, y^{k+1}, yr^{k+1} \leftarrow \text{resolve\_problema}(y^{k+1}, yr^{k+1})$ 

```

4.2. Fix-and-Optimize

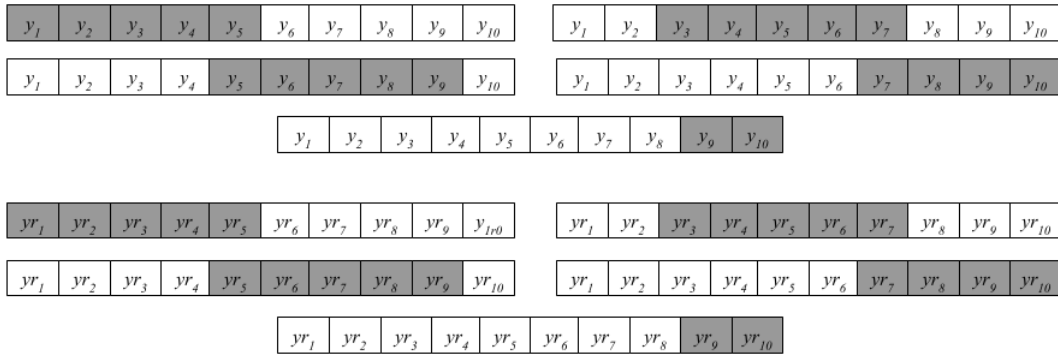
A heurística *Fix-and-Optimize* (FOP) é uma heurística de melhoria e tem como objetivo melhorar uma solução viável inicial já existente. Esta heurística assim como a RF utiliza do particionamento do conjunto das variáveis do problema. Em cada iteração um subconjunto de variáveis (partição) tem suas variáveis tratadas como inteiras enquanto um outro subconjunto (partição) tem os valores das variáveis fixado em determinados valores. Em cada iteração, um subproblema é resolvido, e espera-se encontrar uma solução melhor que a solução inicial, de Araujo et al. (2018).

Na heurística FOP, a escolha das variáveis a serem fixadas, assim como seu número, impacta diretamente no desempenho do algoritmo e na qualidade da solução final. Portanto, a operação de decomposição deve variar em tipo e tamanho, Dorneles et al. (2014).

Considerando a formulação padrão do PDLCR, podemos propor dois tipos de decomposição:

- Decomposição dos conjuntos de variáveis de manufatura (y).
- Decomposição dos conjuntos de variáveis de remanufatura (yr).

Figura 2: Exemplo de funcionamento FOP.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Figura 2 é apresentado um exemplo de funcionamento da heurística FOP. A cada iteração o método seleciona um subconjunto de variáveis para serem otimizadas. Diferente da heurística RF, a FOP não encerra sua execução quando otimiza todas as partições individualmente. Dependendo do critério de parada utilizado na heurística a execução pode se estender e selecionar mais de uma partição para otimizar. A estratégia utilizada neste trabalho é similar a utilizada na heurística RF, ou seja, selecionando as partições que serão otimizadas de forma sobrepostas. No exemplo da Figura 2 são selecionadas as variáveis do conjunto $\{y_1, \dots, y_5\}$ ($\{yr_1, \dots, yr_5\}$) para serem otimizadas na primeira iteração e as demais são fixadas com os seus respectivos valores obtidos da solução inicial. A cada iteração uma nova partição é selecionada para ser otimizada e as demais variáveis que não pertencem a esta partição tem seus valores fixados nos valores obtidos na iteração anterior. A solução inicial utilizada pela heurística FOP é a solução gerada pela heurística RF.

O método apresentado no Algoritmo 3 inicia atribuindo como solução inicial para FOP a solução retornada pelo RF (linhas 3 e 4), em seguida temos a geração do conjunto de p partições $S_1, S_2, \dots, S_p$ (linha 5). De maneira similar a heurística RF, a heurística FOP é aplicada as variáveis y_t e yr_t para $t = 1, \dots, n$, variáveis associadas a produção por manufatura e remanufatura, respectivamente.

Das linha 6 a 13 são percorridas todas as partições geradas na linha 5. Das linhas 7 a 12, definem-se quais variáveis serão tratadas como número inteiros e quais terão seus valores fixados em valores $\{0, 1\}$. Na linha 13 o subproblema associado é resolvido. O algoritmo 3 tem sua execução encerrada após a otimização de todas as partições.

Algoritmo 3: Fix and optimize**Entrada:** $n, tam_part, tam_fix, y, yr$ **Resultado:** sol (solução viável)

```

1 início
2    $k = 0$ 
3    $y^k \leftarrow y$ 
4    $yr^k \leftarrow yr$ 
5    $particoes \leftarrow \text{gera\_particoes}(n, tam\_part, tam\_fix)$ 
6   for  $subset \in particoes$  do
7     for  $i = 1, 2, \dots, n$  do
8       if  $i \notin subset$  then
9          $y_i^{k+1}, yr_i^{k+1} \in \mathbb{B}$ 
10      else
11         $y_i^{k+1} \leftarrow y_i^k$ 
12         $yr_i^{k+1} \leftarrow yr_i^k$ 
13     $sol, y^{k+1}, yr^{k+1} \leftarrow \text{resolve\_problema}(y^{k+1}, yr^{k+1})$ 

```

5. Experimentos Computacionais

Nesta seção são apresentados os resultados dos experimentos computacionais realizados. As instâncias utilizadas, 108 instâncias, foram propostas por Sifaleras et al. (2015), cada uma com um horizonte de planejamento de 52 períodos, ou seja, $T = \{1, 2, \dots, n\}$ e com as seguintes características.

- d_t , demandas, seguindo uma distribuição normal com média igual a 100 unidades para $t \in T$.
- r_t , retornos, seguindo uma distribuição normal com médias no conjunto $\{30, 50, 70\}$ para $t \in T$.
- $f_t, fr_t \in \{200, 500, 2000\}$ para $t \in T$.
- p_t e pr_t consideradas igual a zero para $t \in T$.
- $h_t, hr_t \in \{0.2, 0.5, 0.8\}$ para $t \in T$.

5.1. Configuração Experimental

Todos os experimentos computacionais foram executados em computadores com configuração: 8 Gb de memória RAM, processador Intel(R) Core(TM) i5-3740 CPU @ 3.20GHz e sistema operacional Ubuntu GNU/Linux. Nos experimentos computacionais foram utilizados os resolvedores GUROBI 9.5.2 Gurobi Optimization, LLC (2023), e como interface a linguagem de programação *Python*. O tempo limite para execução de cada instância foi definido como 3600 segundos, o parâmetro de tolerância do resolvedor foi definido no valor $1e-6$, e o número de *threads* foi definido no valor 1. Para fins de testes computacionais, a capacidade foi construída como segue:

$$C = \alpha \times \text{avg}(d), \text{ para } \alpha \in [1.3, 1.8] \quad (45)$$

onde $\text{avg}(d)$ é a média aritmética das demandas ao longo dos períodos.

As instâncias foram divididas em 9 subgrupos, cada subgrupo contendo 12 instâncias, de acordo com o custo fixo (*setup*) de manufatura e remanufatura, onde fr é o valor do custo fixo de remanufatura e f é o valor do custo fixo de manufatura.

- *set01*: $fr = 200, f = 200$

- *set02*: $fr = 200, f = 500$
- *set03*: $fr = 200, f = 2000$
- *set04*: $fr = 500, f = 200$
- *set05*: $fr = 500, f = 500$
- *set06*: $fr = 500, f = 2000$
- *set07*: $fr = 2000, f = 200$
- *set08*: $fr = 2000, f = 500$
- *set09*: $fr = 2000, f = 2000$

Nas tabelas seguintes são apresentados os resultados obtidos utilizando cada uma das formulações abordadas nesse trabalho. A coluna *INSTANCE* denota o conjunto de instância, *LB* e *UB* são as médias do *lower bound*(*best bound*) e *upper bound* (*best solution*) dos conjuntos de instâncias, respectivamente. A coluna *GAP* denota o erro relativo médio entre LB e UB, ou seja, o *gap* é calculado como $100 \cdot \frac{(UB - LB)}{LB}$. A coluna *TIME* denota o tempo médio da execução em cada grupo de instâncias. A coluna *OPT* denota a quantidade de instâncias resolvidas por otimalidade em cada grupo.

As instâncias e os códigos utilizados nos experimentos computacionais estão disponíveis no link a seguir: https://github.com/jesusossian/2025santos_podes.

Os critérios utilizado para avaliação de desempenho dos métodos são o número de instâncias solucionadas por otimalidade. Além disso, para melhor apurar os resultados obtidos pelos métodos, aplicamos o teste de análise de variância(ANOVA) Montgomery (2017) para o *GAP* dos métodos aplicados ao problema.

5.2. Resultados Relaxação Linear

Na Tabela 2 são apresentados os resultados médios da relaxação linear(LR) para cada uma das formulações propostas em cada um dos grupos de instâncias. Analisando a Tabela 2, é possível perceber que a formulação MC e SP apresentam melhores valores de LR com relação a média (12 instâncias) para os conjuntos de instâncias *set01*, *set02* e *set04*. Nos demais conjuntos de instâncias a formulação STD apresentou melhores valores. Foi observado que o ganho em relação a LR é obtido por todas as instâncias do grupo *set01* pelas formulações MC e SP. Nos grupos *set03*, *set06*, *set08* e *set09* o melhor valor da LR é obtido pela formulação STD para todas as instâncias. Para os grupos *set02*, *set04*, *set05* e *set07* não existe um ganho da LR para todas as instâncias de cada grupo em relação a uma única formulação, algumas instâncias tem melhor LR para a formulação MC e SP, e outras tem melhor LR para a formulação STD. Os resultados da LR para todas as instâncias estão disponíveis no material suplementar do link a seguir: https://github.com/jesusossian/2025santos_podes/blob/main/pdf/lr_clsrrp.pdf.

Tabela 2: Resultados da relaxação linear para as formulações propostas.

INSTANCE	LR_MC	LR_SP	LR_STD
set01	9383.55	9383.55	6719.68
set02	13162.74	13162.74	13006.09
set03	24088.93	24088.93	42934.92
set04	12675.68	12675.68	10762.62
set05	16635.16	16635.16	17152.73
set06	28066.33	28066.33	47130.63
set07	20322.81	20322.81	24243.73
set08	24791.74	24791.74	32937.86
set09	37808.37	37808.37	67057.21

Fonte: Elaborada pelo autor.

5.3. Resultados Modelo Inteiro Misto.

Na Tabela 3 são apresentados os resultados da formulação STD. Essa formulação, obteve a solução ótima em 80 instâncias. Os grupos que tiveram maior número de instâncias resolvidas foram *set01*, *set04*, *set05*, *set07* e *set08*.

Tabela 3: Resultados da formulação padrão.

INSTANCE	LB	UB	GAP	TIME	OPT
set01	10625.84	10641.49	0.15	1247.22	10
set02	17145.75	17222.92	0.45	2313.22	7
set03	48046.57	48176.59	0.27	2564.90	5
set04	14875.52	14875.52	0.00	284.38	12
set05	21783.95	21814.28	0.13	1715.27	10
set06	52643.11	52795.95	0.30	2538.39	6
set07	27721.94	27721.94	0.00	2.88	12
set08	36906.26	36906.27	0.00	27.72	12
set09	72670.70	72846.35	0.23	1995.32	6
MIP STD	33602.18	33666.81	0.17	1409.92	80

Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Tabela 4 são apresentados os resultados da formulação MC. Essa formulação, obteve a solução ótima em 38 instâncias testadas. Os grupos que tiveram maior número de instâncias resolvidas foram *set04*, *set07* e *set08*. Os conjuntos de instâncias *set03* e *set09* não tiveram nenhuma instância resolvida.

Tabela 4: Resultados da formulação *multi-commodity*.

INSTANCE	LB	UB	GAP	TIME	OPT
set01	10569.86	10644.82	0.69	2946.67	3
set02	16958.01	17229.39	1.58	3538.70	1
set03	47315.93	48207.02	1.82	3600.00	0
set04	14854.23	14875.52	0.14	1620.53	10
set05	21493.70	21834.05	1.58	3586.34	1
set06	52266.71	52869.36	1.17	3600.00	0
set07	27721.94	27721.94	0.00	50.52	12
set08	36876.58	36906.27	0.07	799.31	11
set09	72024.63	72898.66	1.19	3600.00	0
MIP MC	33342.40	33687.45	0.91	2593.56	38

Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Tabela 5 são apresentados os resultados da formulação SP. Essa formulação, obteve a solução ótima em 15 instâncias testadas. Os grupos que tiveram maior número de instâncias resolvidas foram *set07* e *set08*. Os demais conjuntos de instâncias não tiveram nenhuma instância resolvida.

Realizando um comparativo entre as formulações apresentadas na Seção 3, a formulação STD apresenta resultados melhores que as formulações SP e MC. Na formulação STD foi provado a otimalidade em 80 das 108 instâncias utilizadas para teste. Além disso, o erro relativo entre o LB e UB da formulação STD apresenta um valor baixo, ou seja, apresentando boa qualidade das soluções de instâncias não resolvidas.

Podemos observar que apesar das formulações MC e SP apresentarem os mesmos valores na relaxação linear para todas as instâncias testadas, de acordo com a Tabela 2, quando comparamos o resultado do modelo inteiro misto dessas formulações a formulação MC possui um melhor desempenho quanto ao número de instâncias onde se foi provada a otimalidade,

Tabela 5: Resultados da formulação *shortest path*.

INSTANCE	LB	UB	GAP	TIME	OPT
set01	10262.92	10654.18	3.68	3600.00	0
set02	16693.90	17242.45	3.20	3600.01	0
set03	46836.73	48230.33	2.89	3600.00	0
set04	14436.87	14893.82	3.07	3600.00	0
set05	21104.26	21858.60	3.44	3600.00	0
set06	51484.87	52945.74	2.84	3600.00	0
set07	27671.57	27721.93	0.12	1101.85	10
set08	36660.19	36907.85	0.58	2457.01	5
set09	71765.48	72934.06	1.59	3600.01	0
MIP SP	32990.76	33709.88	2.38	3195.43	15

Fonte: Elaborada pelo autor.

38 na MC e 15 na SP. Essa é uma questão não conseguimos responder. Os resultados dos testes de Análise de Variância (ANOVA) com os intervalos HSD (diferença honestamente significativa) Tukey ($\alpha = 0,05$) estão disponíveis como material suplementar no link a seguir: https://github.com/jesusossian/2025santos_podes/tree/main/fig.

Com relação às formulações matemáticas comparadas, É possível destacar que existem diferenças estatisticamente significativas entre os valores de GAP entre todas as formulações apresentadas. Considerando a formulação SP (SP_MIP) e a formulação MC (MC_MIP), a diferença é significativa e MC apresenta melhores resultados que SP. Pode-se ainda observar o intervalo de confiança SP_MIP - MC_MIP acima é igual a zero. Ao se comparar os resultados médios apresentados pelas três formulações, é possível constatar que a formulação STD (STD_MIP) obtém os melhores resultados. Ademais, pode-se ressaltar também que os resultados obtidos por MC são melhores que os obtidos por SP.

5.4. Heurísticas para o CLSR

Nesta seção, são apresentados os resultados obtidos utilizando as heurísticas RF e FOP. Além disso, apresentamos os parâmetros que foram utilizados para a obtenção desses resultados. As colunas das Tabelas 7 e 6 são definidas como segue:

- RF : Valor médio obtido pelo método *Relax-and-fix* para cada grupo de instâncias.
- T_RF : Tempo médio do método *Relax-and-fix* para cada grupo de instâncias.
- FOP : Valor médio obtido pelo método *Fix-and-Optimize*.
- T_FOP : Tempo médio do método *Fix-and-Optimize*.
- TIME : Tempo total médio, utilizando os dois métodos.
- LB_MIP : Valor médio do *lower bound* das formulações para cada grupo de instância.
- TIME_MIP : Tempo médio da formulação para cada grupo de instância.
- GAP_RF : Gap médio do método RF para cada grupo de instâncias em relação ao *upper bound* da formulação.
- GAP_FOP : Gap médio do método FOP para cada grupo de instâncias em relação ao *upper bound* da formulação.
- RESUME: média aritmética simples nas colunas RF, T_RF, FOP, T_FOP, TIME, FO_MIP, TIME_MIP, GAP_RF, GAP_FOP, LB, UB, T_MIP, RF, T_RF, FOP, T_FOP, GAP_MIP %, T_TOT_HEUR e somatório na coluna OPT.

Para os testes computacionais as partições foram definidas da seguinte forma:

- Tamanho partição = 6
- Variáveis que serão fixadas = 3

Consideramos em todas as formulações como solução inicial para a heurística FOP a solução viável retornada pela RF. A execução da FOP é encerrada após a otimização de todas

as partições.

Tabela 6: Resultados das heurísticas RF e FOP formulação padrão.

INSTANCE	RF	T_RF	FOP	T_FOP	TIME	FO_MIP	TIME_MIP	GAP_RF %	GAP_FOP %
set01	10748.35	0.53	10712.27	0.38	0.91	10625.84	1247.22	1.16	0.82
set02	17384.50	0.57	17327.01	0.38	0.96	17145.75	2313.22	1.39	1.06
set03	48396.58	0.56	48316.12	0.36	0.92	48046.57	2564.90	0.74	0.56
set04	15608.54	0.37	15053.38	0.29	0.66	14875.52	284.38	5.24	1.25
set05	22737.25	0.42	22322.84	0.30	0.72	21783.95	1715.27	4.36	2.45
set06	53435.59	0.41	53111.90	0.29	0.70	52643.11	2538.39	1.56	0.92
set07	32253.37	0.23	27976.77	0.21	0.44	27721.94	2.88	14.93	0.78
set08	41857.80	0.25	37574.29	0.19	0.44	36906.26	27.72	12.70	1.72
set09	80114.30	0.33	78116.33	0.22	0.55	73210.98	2163.12	9.35	6.66
RESUME	35837.36	0.41	34501.21	0.29	0.70	33662.21	1428.57	5.71	1.80

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 7: Resultados das heurísticas RF e FOP formulação *multi-commodity*.

INSTANCE	RF	T_RF	FOP	T_FOP	TIME	LB_MIP	TIME_MIP	GAP_RF %	GAP_FOP %
set01	10718.82	6.77	10678.45	3.29	10.06	10569.86	2946.67	1.39	1.02
set02	17377.06	8.12	17353.10	3.85	11.98	16958.01	3538.70	2.50	2.36
set03	48375.31	9.82	48312.37	4.23	14.05	47315.93	3600.00	2.20	2.08
set04	15032.00	6.99	14963.78	3.38	10.36	14854.23	1620.53	1.21	0.72
set05	22049.72	9.38	21968.93	3.95	13.33	21493.70	3586.34	2.60	2.23
set06	53233.23	12.22	53137.71	4.36	16.58	52266.71	3600.00	1.88	1.71
set07	33013.08	5.87	28002.13	2.76	8.63	27721.94	50.52	17.10	0.97
set08	42352.82	7.58	37289.46	3.29	10.86	36876.58	799.31	13.86	1.04
set09	73353.19	14.18	73182.04	3.84	18.02	72024.63	3600.00	1.83	1.60
RESUME	35056.13	8.99	33876.44	3.66	12.65	33342.40	2593.56	4.95	1.52

Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Tabela 7 são apresentados os resultados computacionais das heurísticas RF e FOP utilizando a formulação MC. Para analisar a qualidade da solução obtida pelas heurísticas, utilizou-se o *upper bound* obtido da solução da formulação. Dessa forma, o *gap* para cada método foi calculado usando a fórmula $100 \cdot \frac{(Z - LB)}{LB}$, no qual Z denota o valor de função objetivo (cota superior) gerada pelo método RF ou FOP, e LB denota o melhor *lower bound* obtido pela formulação.

Analisando a Tabela 7, pode-se observar que as heurísticas apresentadas obtiveram boas cotas superiores para a formulação MC. As heurísticas levaram um tempo médio de 12.65 segundos para obter resultados com um *gap* médio de 4.95% para a heurística RF, e um *gap* médio de 1.52% para a heurística FOP, em relação a cota superior obtida resolvendo o MIP da formulação MC.

Tabela 8: Resultados das heurísticas RF e FOP formulação *shortest path*.

INSTANCE	RF	T_RF	FOP	T_FOP	TIME	LB_MIP	TIME_MIP	GAP_RF %	GAP_FOP %
set01	10718.82	4.13	10678.45	2.87	6.99	10262.92	3600.00	4.45	4.06
set02	17377.06	5.90	17353.10	3.50	9.40	16693.90	3600.01	4.14	3.99
set03	48375.31	9.22	48312.37	4.55	13.77	46836.73	3600.00	3.29	3.16
set04	15032.00	4.95	14963.78	2.83	7.78	14436.87	3600.00	4.14	3.64
set05	22049.72	7.61	21968.93	3.47	11.08	21104.26	3600.00	4.48	4.10
set06	53233.23	10.68	53137.71	4.28	14.97	51484.87	3600.00	3.49	3.32
set07	33013.08	4.97	28003.46	2.84	7.81	27671.57	1101.85	17.26	1.10
set08	42352.82	6.97	37289.46	3.26	10.23	36660.19	2457.01	14.50	1.58
set09	73353.19	18.79	73182.04	4.28	23.06	71765.48	3600.01	2.19	1.95
RESUME	35056.13	8.13	33876.59	3.54	11.68	32990.76	3195.43	6.44	2.99

Fonte: Elaborada pelo autor.

Analisando a Tabela 8, podemos afirmar que as heurísticas apresentadas obtiveram boas cotas superiores para a formulação SP. As heurísticas levaram um tempo médio de 11.68 segundos para obter resultados com um *gap* médio de 6.44% para a heurística RF, e um *gap* médio de 2.99%

para a heurística FOP, em relação a cota superior obtida resolvendo o MIP da formulação SP. As soluções do MIP foram obtidas com um tempo médio de 3195.43 segundos. Os resultados médios para cada grupo obtido usando as heurísticas foram iguais para as formulações MC e SP.

Na Tabela 6 são apresentados os resultados computacionais das heurísticas utilizado a formulação STD, podemos afirmar que as heurísticas obtiveram bons resultados para a formulação STD. As heurísticas levaram um tempo médio de inferior a 1 segundos para obter resultados com um *gap* médio de 5.71% para a heurística RF, e um *gap* médio de 1.80% para a heurística FOP, em relação a cota superior obtida resolvendo o MIP da formulação STD. As soluções do MIP foram obtidas com um tempo médio de 1409.92 segundos.

Com relação aos resultados obtidos pelas heurísticas, o desvio para aplicação do teste estatístico foi calculado usando o *lower bound* obtido pela formulação STD que apresentou melhores resultados. Como pode ser observado no material suplementar, existem diferenças estatisticamente significativas entre os valores de *gap* de todas as heurísticas FOP e RF. Comparando a qualidade das soluções dos métodos, é possível constatar que a heurística FOP obtém os melhores resultados que a heurística RF, e os resultados obtidos por FOP não apresentam diferenças significativas entre as formulações.

5.5. Resultados MIP Utilizando Heurísticas

Nesta seção apresentamos os resultados obtidos pelas formulações utilizando a solução das heurísticas como solução inicial. Para a obtenção das soluções iniciais foi utilizado os métodos e parâmetros descritos na Seção 5.4.

Tabela 9: Resultados usando solução inicial formulação MC.

INSTANCE	LB	UB	T_MIP	RF	T_RF	FOP	T_FOP	GAP_MIP %	T.TOT.HEUR	OPT
set01	10570.66	10643.52	2816.54	10718.82	9.45	10678.45	5.06	0.67	14.51	4
set02	16962.39	17240.33	3600.00	17377.06	11.31	17353.10	5.80	1.62	17.10	0
set03	47310.59	48238.03	3600.00	48375.31	13.22	48312.37	6.22	1.93	19.44	0
set04	14859.83	14875.52	1470.27	15032.00	9.27	14963.78	5.01	0.10	14.28	11
set05	21479.09	21839.06	3600.00	22049.72	12.34	21968.93	5.62	1.66	17.96	0
set06	52202.30	52851.82	3600.00	53233.23	15.69	53137.71	6.20	1.26	21.89	0
set07	27721.94	27721.94	70.68	33013.08	7.98	28002.13	4.25	0.00	12.23	12
set08	36906.25	36906.27	955.36	42352.82	10.07	37289.46	4.96	0.00	15.02	12
set09	71972.98	72885.92	3600.00	73353.19	18.97	73182.04	5.84	1.23	24.81	0
RESUME	33331.78	33689.15	2590.32	35056.13	12.03	33876.44	5.44	0.94	17.47	39

Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Tabela 9 são apresentados os resultados da formulação MC, os resultados obtidos pela matheurística e pela solução MIP e os tempos computacionais de execução. A utilização de uma solução inicial para a resolução do MIP aumentou de 38 para 39 o número de instâncias resolvida pela formulação MC. O *lower bound* e *upper bound* obtidos utilizando uma solução inicial são parecidos com os obtidos pela formulação MC descritos na Seção 5.3. Dessa forma, o principal ganho da utilização da solução inicial na formulação MC foi a resolução de uma instância a mais.

Na Tabela 10 são apresentados os resultados da formulação SP, os resultados obtidos pela matheurística e pela solução MIP e os tempos. A utilização de uma solução inicial para a resolução do MIP aumentou de 15 para 16 o número de instâncias resolvida pela formulação SP. O *lower bound* e o *upper bound* obtidos utilizando uma solução inicial são parecidos com os obtidos pela formulação SP descritos na Seção 5.3. Dessa forma, o principal ganho da utilização da solução inicial na formulação SP foi a resolução de uma instância a mais.

Na Tabela 11 são apresentados os resultados da formulação STD, os resultados obtidos pela heurística e pela solução MIP e os tempos de execução. A formulação STD foi a que obteve os melhores resultados, contudo ao aplicar a solução inicial das heurísticas duas instâncias do grupo *set03* e uma do grupo *set06*, que foram resolvidas pela formulação na Seção 5.3 não foram resolvidas ao utilizar uma solução inicial. Entretanto, o conjunto de instâncias *set05* teve aumento

Tabela 10: Resultados usando solução inicial formulação SP.

INSTANCE	LB	UB	T_MIP	RF	T_RF	FOP	T_FOP	GAP_MIP %	OPT
set01	10268.66	10661.14	3600.01	10718.82	5.35	10678.45	3.83	3.67	0
set02	16694.92	17259.38	3600.01	17377.06	7.63	17353.10	4.62	3.29	0
set03	46725.04	48262.31	3600.01	48375.31	11.66	48312.37	5.85	3.23	0
set04	14468.86	14881.61	3528.67	15032.00	6.40	14963.78	3.82	2.77	1
set05	21109.06	21873.61	3600.01	22049.72	9.73	21968.93	4.62	3.49	0
set06	51519.17	52913.61	3600.01	53233.23	13.45	53137.71	5.54	2.70	0
set07	27668.66	27721.93	1099.76	33013.08	6.40	28003.46	3.85	0.12	10
set08	36656.49	36906.26	2489.23	42352.82	8.88	37289.46	4.35	0.60	5
set09	71708.23	72948.79	3600.01	73353.19	23.07	73182.04	5.47	1.68	0
RESUME	32979.90	33714.29	3190.86	35056.13	10.29	33876.59	4.66	2.40	16

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 11: Resultados usando solução inicial formulação STD.

INSTANCE	LB	UB	T_MIP	RF	T_RF	FOP	T_FOP	GAP_MIP %	OPT
set01	10631.00	10641.49	1250.68	10748.35	0.74	10712.27	0.53	0.10	10
set02	17157.00	17222.97	2257.54	17384.50	0.72	17327.01	0.51	0.40	7
set03	48023.24	48178.00	3185.24	48396.58	0.67	48316.12	0.47	0.33	3
set04	14875.52	14875.52	361.66	15608.54	0.50	15053.38	0.42	0.00	12
set05	21803.74	21814.28	1757.34	22737.25	0.57	22322.84	0.44	0.04	11
set06	52613.42	52790.41	2472.11	53435.59	0.57	53111.90	0.43	0.33	5
set07	27721.94	27721.94	2.87	32253.37	0.35	27976.77	0.34	0.00	12
set08	36906.27	36906.27	24.57	41857.80	0.36	37574.29	0.31	0.00	12
set09	72655.54	72846.17	2149.31	79150.18	0.47	77167.27	0.34	0.24	6
RESUME	33598.63	33666.34	1495.70	35730.24	0.55	34395.76	0.42	0.16	78

Fonte: Elaborada pelo autor.

de uma instância resolvida.

Com relação aos intervalos Tukey HSD no nível de confiança de 95% para o MIP, utilizando solução inicial e sem utilizar uma solução inicial, pode-se ressaltar que existem diferenças estatisticamente significativas entre os valores de GAP de todos os pares de formulações diferentes. A comparação de uma formulação com solução inicial e sem a solução inicial, não apresentou diferenças significativas. Comparando a qualidade das soluções dos métodos, é possível verificar que a formulação MC se mostra superior a formulação SP e SP_H (formulação SP usando solução inicial), e os resultados obtidos pela formulação STD se mostram superior as outras formulações quando avaliamos a diferença média do *gap* das soluções obtidas não apresentam diferenças significativas entre as formulações.

6. Conclusões

Neste trabalho foi estudado uma variante do problema de dimensionamento de lotes, o problema de dimensionamento de lotes capacitado com retorno (PDLCR). Foi feita uma revisão da literatura sobre problemas de planejamento da produção e adotamos três formulações (STD, MC e SP) para a modelagem matemática do problema estudado.

Foram propostas duas heurísticas, *Relax-and-Fix* e a *Fix-and-Optimize*, para cada uma das três formulações propostas. Além disso, foram realizados testes computacionais fundamentados em trabalhos da literatura para a análise da performance do Gurobi na resolução dos modelos matemáticos propostos.

Os resultados mostraram que a formulação original proposta para o problema apresentou bom desempenho, resolvendo grande parte das instâncias de teste. As formulações SP e MC, apresentaram baixo desempenho resolvendo por otimalidade menos da metade das instâncias testadas. Além disso, as heurísticas apresentadas mostraram um desempenho satisfatório para obtenção de boas soluções viáveis.

Como principais limitações do estudo, podem ser destacadas: (i) o PDLCR abordado nesse trabalho, foi formulado considerando a produção e remanufatura de um único item e uma única

linha de produção e remanufatura; e às instâncias de Sifaleras et al. (2015) adaptadas ao problema.

O trabalho apresentado pode ser expandido para variantes do PDL com multi-itens e multi-plantas (linha de produção/remanufatura). Além disso, outras abordagens heurísticas podem ser aplicadas ao problema abordado nesse trabalho como *Variable Neighborhood Search* e *Simulated Annealing*. Instâncias utilizadas em outros trabalhos sobre o problema de dimensionamento de lotes com retorno não capacitado, podem ser adaptadas para a variante capacitada que foi estudada.

Agradecimentos. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), processos 407151/2021-4 e 309755/2021-2.

Referências

- Boctor, F. F. Single-machine capacitated lot-sizing and scheduling with delivery dates and quantities. *International Journal of Production Research*, v. 60, n. 24, p. 7345–7359, 2022.
- Brahimi, N., Dauzere-Peres, S., Najid, N. M., e Nordli, A. Single item lot sizing problems. *European Journal of Operational Research*, v. , 2006.
- Brahimi, N. e Dauzère-Pérès, S. A lagrangian heuristic for capacitated single item lot sizing problems. *Operational Research*, v. , 2015.
- Bunn, K. A. e Ventura, J. A. Reformulations to improve the lagrangian relaxation approach for the capacitated multi-product dynamic lot sizing problem with batch ordering. *International Journal of Production Research*, v. 62, n. 8, p. 2868–2887, 2024.
- Chen, W. H. e Thizy, J. M. Analysis of relaxations for the multi-item capacitated lot-sizing problem. *Annals of Operations Research*, v. , 1990.
- Cho, Y.-H., Doh, H.-H., e Lee, D.-H. Capacitated dynamic lot-sizing for remanufacturing systems with parallel reprocessing workstations. *International Conference of “Advances in Engineering and Technology”*, v. , 2017.
- Cunha, J. O., Kramer, H. H., e Melo, R. A. Effective matheuristics for the multi-item capacitated lot-sizing problem with remanufacturing. *Computers and Operations Research*, v. , 2019.
- Cunha, J. O. e Melo, R. A. A computational comparison of formulations for the economic lot-sizing with remanufacturing. *Computers & Industrial Engineering*, v. 92, 2016.
- de Araujo, S. A., del Carmen Huaccha Neyra, J., e Fiorotto, D. J. Heurísticas relax-and-fix e fix-and-optimize para o problema de dimensionamento de lotes com preparações carryover e crossover. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, v. , 2018.
- Dorneles, A. P., Araújo, O. C. B., e Buriol, L. S. A fix-and-optimize heuristic for the high school timetabling problem. *Computers and Operations Research*, v. , 2014.
- Drexl, A. e Kimms, A. Lot sizing and scheduling - survey and extensions. *Operations Research*, v. , 1997.
- Dzielinski, B. P. e Gomory, R. E. Optimal programming of lot sizes, inventory and labor allocations. *Management Science*, v. 11, n. 9, 1965.

- Eisenhut, P. A dynamic lot sizing algorithm with capacity constraints. *AIIE transactions*, v. 7, n. 2, 1975.
- Eppen, G. D. e Martin, R. K. Solving multi-item capacitated lot-sizing problems using variable redefinition. *Operations Research*, v. , 1987.
- Farhat, M., Akbalik, A., Hadj-Alouane, A. B., e Sauer, N. Lot sizing problem with batch ordering under periodic buyback contract and lost sales. *International Journal of Production Economics*, v. 208, p. 500–511, 2019.
- Gurobi Optimization, LLC. *Gurobi Optimizer Reference Manual*, 2023. Disponível em: <https://www.gurobi.com>. Acesso em: 14/5/2023.
- Karimi, B., Fatemi Ghomi, S., e Wilson, J. The capacitated lot sizing problem: a review of models and algorithms. *Omega*, v. , 2003.
- Lambrecht, M. R. e Vanderveken, H. Heuristic procedures for the single operation, multiitem loading problem. *AIIE Transactions*, v. , 1979.
- Modigliani, F. e Hohn, F. E. Production planning over time and the nature of the expectation and planning horizon. *Econometrica, Journal of the Econometric Society*, v. , 1955.
- Montgomery, D. C. *Design and analysis of experiments*. Hoboken, NJ, USA: John wiley & sons, 2017.
- Piñeyro, P. e Viera, O. The economic lot-sizing problem with remanufacturing and heterogeneous returns: formulations, analysis and algorithms. *International Journal of Production Research*, v. 60, n. 11, p. 3521–3533, 2022.
- Pochet, Y. e Wolsey, L. A. *Production Planning by Mixed Integer Programming*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2006.
- Retel Helmrich, M. J., Jans, R., van den Heuvel, W., e Wagelmans, A. P. Economic lot-sizing with remanufacturing: complexity and efficient formulations. *IIE Transactions*, v. 46, n. 1, 2014.
- Ribeiro, R. S. *Problema de dimensionamento e sequenciamento de lotes em linhas paralelas: uma aplicação em uma indústria de alimentos*. . Dissertação de Mestrado. Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017.
- Richter, K. e Sombrutzki, M. Remanufacturing planning for the reverse wagner/whitin models. *European Journal of Operational Research*, v. 121, n. 2, 2000.
- Richter, K. e Weber, J. The reverse wagner/whitin model with variable manufacturing and remanufacturing cost. *International Journal of Production Economics*, v. 71, n. 1-3, 2001.
- Roshani, A., Giglio, D., e Paolucci, M. A relax-and-fix heuristic approach for the capacitated dynamic lot sizing problem in integrated manufacturing/remanufacturing systems. *IFAC PapersOnLine*, v. , 2017.
- Schulz, T. A new silver–meal based heuristic for the single-item dynamic lot sizing problem with returns and remanufacturing. *International Journal of Production Research*, v. 49, n. 9, 2011.
- Sifaleras, A., Konstantaras, I., e Mladenovic, N. Variable neighborhood search for the economic lot sizing problem with product returns and recovery. *Int. J. Production Economic*, v. , 2015.
- Teunter, R. H., Bayindir, Z. P., e Den Heuvel, W. V. Dynamic lot sizing with product returns and remanufacturing. *International Journal of Production Research*, v. 44, n. 20, 2006.

Toledo, C. F. M., Arantes, M. D. S., Hossomi, M. Y. B., França, P. M., e Akartunali, K. A relax-and-fix with fix-and-optimize heuristic applied to multi-level lot-sizing problems. *Journal of Heuristics*, v. , 2015.

Wagner, H. M. e Whitin, T. M. Dynamic version of the economic lot size model. *Management Science*, v. , 1958.

Wolsey, L. A. *Integer Programming*. : Wiley-Interscience Publication, 1998.

Zhang, Z.-H., Jiang, H., e Pan, X. A lagrangian relaxation based approach for the capacitated lot sizing problem in closed-loop supply chain. *Int. J. Production Economics*, v. , 2012.