

MINIMIZAÇÃO DO CUSTO DE INSUMOS AGRÍCOLAS PARA UM NÍVEL FIXO DE PRODUÇÃO¹

Sergio Drumond Ventura^{a*}, Angel Ramon Sanchez Delgado^a

^aDep. de Matemática, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, 23897-970, Seropédica, RJ

Recebido 18/05/2023, aceito 22/05/2025

RESUMO

Atualmente para o produtor agrícola tem sido calamitoso lidar com o custo dos insumos água e nitrogênio, por escassez, ou pelos preços no mercado nacional e internacional. Nesse trabalho apresentamos um procedimento computacional de fácil implementação, que determina a lâmina de água e dose de nitrogênio com custo mínimo, para um nível fixo de produção, medido via uma função do tipo Cobb–Douglas. O procedimento está baseado em uma hibridez entre os métodos barreira logarítmica e Lagrange, e sua implementação foi testada através de ensaios numéricos que utilizam informações na literatura do alface, do melão, da aveia e da cebola. Os níveis de produção (pré-fixados) utilizados, para cada cultura, considera percentuais da produtividade média conhecida. Os custos da lâmina de água e da dose de nitrogênio foram mantidos como os apresentados na literatura. Em geral, o procedimento mostrou convergência e consistência numérica, permitindo a um funcionário do agronegócio, formar um planejamento ótimo.

Palavras-chave: Hibridez, Cobb–Douglas, Barreira logarítmica, Lagrange.

ABSTRACT

Currently, for the agricultural producer, it has been calamitous to deal with the cost of water and nitrogen inputs, due to scarcity, or due to prices in the national and international markets. In this work we present an easy-to-implement computational procedure, which determines the water depth and nitrogen dose at a minimum cost, for a fixed level of production measured via a Cobb–Douglas type function. The procedure is based on a hybridity between the logarithmic barrier and Lagrange methods, and their implementation was tested through numerical tests using information in the literature on lettuce, melon, oats, and onion. The production levels (pre-fixed) used, for each crop, consider percentages of the known average productivity. The costs of water depth and nitrogen dose were maintained as presented in the literature. In general, the procedure showed numerical convergence and consistency, allowing an agribusiness employee to form an optimal plan.

Keywords: Hybridity, Cobb–Douglas, Logarithmic barrier, Lagrange.

* Autor para correspondência. E-mail: ventura@ufrrj.br
DOI: <https://doi.org/10.4322/PODes.2025.002>

¹Todos os autores assumem a responsabilidade pelo conteúdo do artigo.

1. Introdução

Segundo o MAPA (Ministério da Agricultura, Pecuária e Abastecimento), insumos agrícolas são todos os fatores de produção utilizados com o objetivo de garantir nutrição, proteção, boa produtividade e qualidade das culturas agrícolas. Dentre os insumos, existem dois essenciais e estratégicos, como são água e nitrogênio, e sem os quais parece impossível qualquer produção agrícola. A água é um recurso natural indispensável à sobrevivência do homem e dos demais seres vivos do planeta e é o setor agrícola o maior consumidor de água. A nível mundial, a agricultura consome cerca de 69% de toda a água derivada das fontes (rios, lagos e aquíferos subterrâneos). É importante lembrar que a água é um fator limitante na produção de qualquer cultura agrícola e que tanto a falta quanto o excesso afetam o crescimento e saúde das plantas. A água constitui aproximadamente 90% do peso da planta ou cultura, atuando em praticamente todos os processos fisiológicos e bioquímicos (Rodrigues e Zaccaria, 2020).

Além da água, o nitrogênio desempenha uma importante função no metabolismo vegetal, pois participa na biossíntese de proteínas e clorofila, como na nutrição da cultura. Mais ainda, a sua deficiência pode causar desordem nutricional (Lopes e Guilherme, 2000; Li e Rao, 2003; Pires et al., 2001). Este insumo garante um desenvolvimento forte e sustentável da cultura agrícola, sendo responsável pelo crescimento e desenvolvimento de raízes, caules e folhas. A planta absorve, ainda no começo da vida, a maior parte do nitrogênio de que precisa e o armazena em seus tecidos de crescimento. Na realidade, este insumo assume um papel de destaque por fazer parte de fertilizantes e corretivos agrícolas.

Considerando que a demanda de água e preços do nitrogênio na agricultura brasileira cresce a cada dia, se faz necessário conhecer o custo mínimo destes insumos que permitam alcançar um nível de produção confiável de uma determinada cultura agrícola (English e Raja, 1996; Paz et al., 2000; Aguilera et al., 2013). Os custos com insumos nas produções agrícolas podem ser um dos maiores vilões da lucratividade do produtor. Entende-se por custo econômico de um insumo agrícola a estimativa monetária desse insumo no mercado. No caso da água, embora o custo de um metro cúbico administrado pela agência hídrica ANA pareça insignificante, eles podem ser onerosos se consideramos outros parâmetros como energia elétrica, bombeamento, entre outros. Seu valor econômico existe na medida em que seu uso altera o nível de produção e consumo (Da Motta, 1998; Pearce e Turner, 1990; Nogueira et al., 2000). No caso do nitrogênio, os custos de aquisição são elevados em função de inúmeros fatores. Alguns são bem conhecidos, enquanto outros derivam de particularidades do setor, como a aparente concentração econômica da comercialização de fertilizantes no Brasil e as restrições ambientais à atividade de mineração. Sem dúvida que o alto nível de importação dos fertilizantes e a indexação de seu preço à variação cambial do dólar americano, afeta os empreendimentos agrícolas do pequeno e médio produtor rural.

Agora, em relação à produtividade de uma cultura agrícola, entendemos por função de produção ou resposta agrícola, como aquela que expressa a relação física entre as quantidades utilizadas de certo conjunto de insumos e as quantidades físicas máximas que se podem obter do produto, para uma dada tecnologia usada (Frizzzone et al., 2005). Nesse trabalho consideramos as funções de produção em relação aos insumos ou variáveis: lâmina de água e dose de nitrogênio. A literatura da otimização agrícola mostra que a quantificação da produção em relação a estas variáveis normalmente é feita utilizando uma forma biquadrática (modelo polinomial de segunda ordem), obtida através de um processo de regressão (Frizzzone et al., 1995; Bertonha et al., 1999; Pereira et al., 2003; Frizzzone et al., 2005; Monteiro et al., 2006, 2007; De Castro et al., 2007; Silva et al., 2008; Carvalho et al., 2009). Porém, também existem experiências numéricas que quantificam a produção utilizando funções do tipo Cobb–Douglas (Debertin, 2012; Delgado e Ventura, 2022).

Há quase um século, Charles W. Cobb e Paul H. Douglas publicaram um estudo no qual modelaram o crescimento da economia americana em relação à mão de obra e ao capital, durante o período de 1899–1922 (Cobb e Douglas, 1928). O modelo provou ser muito preciso. Na atualidade

o termo função de produção tipo Cobb–Douglas tem sido usado para se referir a quase qualquer função de utilidade produtiva multiplicativa simples (Vaggi e Groenewegen, 2003; Damodar, 2003; Varian, 2010; Besanko e Braeutigan, 2015). Neste trabalho utilizaremos uma função do tipo Cobb–Douglas para medir a produção de uma determinada cultura agrícola, em relação aos insumos lâmina de água e dose de nitrogênio, e o problema a ser considerado, tem como objetivo, minimizar os custos dos insumos que permitem alcançar uma determinada produção pré-fixada.

A escolha de uma função de produção do tipo Cobb–Douglas e não, por exemplo, uma função de produção tipo biquadrática, acontece porque para o tipo Cobb–Douglas, não precisamos utilizar um método de regressão para determinar a fórmula analítica da função, enquanto que no caso de biquadrática, é necessário a utilização da regressão para determinar os coeficientes que permitem construir a fórmula analítica da função.

No que se segue, apresentamos um procedimento computacional baseado em uma hibridez entre o método barreira logarítmica e o método de Lagrange, capaz de determinar uma solução ótima do programa não-linear associado ao problema em questão (Bazaraa et al., 2006; Bertsekas, 2016). Podemos dizer que a contribuição da proposta computacional apresentada é poder participar na tomada de decisão de um produtor agrícola, ao permitir-lhe conhecer através de um procedimento simples de implementar, o custo mínimo dos insumos lâmina de água e dose de nitrogênio necessários para alcançar um nível pré-fixado de produção.

Por último, até o momento da finalização deste artigo, não encontramos na literatura da otimização agrícola uma modelagem similar do problema aqui tratado com o qual pudéssemos realizar comparações numéricas.

2. Material e Métodos

No planejamento agrícola (agronegócio) é importante conhecer a lâmina de água e dose de nitrogênio com custo mínimo que permitam alcançar uma produção pré-fixada. Formalmente, interessa resolver a família de problemas:

$$\begin{aligned} P(\sigma) \quad & \text{minimizar} \quad h(w, n) := c_w w + c_n n \\ & \text{sujeito a} \quad \psi(w, n) := k w^\alpha n^{1-\alpha} = \sigma, \quad (k > 0, 0 < \alpha < 1, \sigma > 0) \\ & \quad w, n > 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Note que para cada σ (nível de produção pré-fixado ou desejado, $kg \cdot ha^{-1}$), $P(\sigma)$ representa um problema de programação não-linear, onde:

- w – lâmina de água (mm),
- n – dose de nitrogênio (kg),
- c_w – custo de uma lâmina de água ($R\$ \cdot mm^{-1}$),
- c_n – custo de uma dose de nitrogênio ($R\$ \cdot kg^{-1}$),
- $\psi(w, n)$ – função de produção do tipo Cobb–Douglas de determinada cultura ($kg \cdot ha^{-1}$).

Aplicando o logaritmo em ambos os lados de (1), podemos equivalentemente escrever $P(\sigma)$ por:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} \quad h(w, n) \\ & \text{sujeito a} \quad \alpha \ln w + (1 - \alpha) \ln n + \ln k = \ln \sigma \\ & \quad w, n > 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Sejam $\beta := \ln k$ e $y(w, n) := \alpha \ln w + (1 - \alpha) \ln n + \beta$. Então, para cada $\sigma > 0$, podemos escrever o problema de programação não-linear anterior por:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} \quad h(w, n) \\ & \text{sujeito a} \quad y(w, n) = \ln \sigma \\ & \quad w, n > 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Para a construção do procedimento desejado, suponha inicialmente dado um parâmetro $\mu > 0$, e associemos ao problema anterior a função estritamente convexa: $\phi_\mu(w, n) := h(w, n) - \mu \ln w - \mu \ln n$ (função objetivo e barreira logarítmica associada às restrições $w, n > 0$). Então, para cada $\sigma > 0$, tentamos resolver:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} \quad \phi_\mu(w, n) \\ &\text{sujeito a} \quad g(w, n) := y(w, n) - \ln \sigma = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Seja $L_\mu(w, n, v) := \phi_\mu(w, n) - vg(w, n)$, onde $v \in \mathbb{R}$ são os Multiplicadores de Lagrange. Assim, queremos:

$$\text{minimizar} \quad L_\mu(w, n, v). \quad (5)$$

Pelas condições de primeira ordem, (w, n, v) resolve (5) se, e somente se, $\nabla L_\mu(w, n, v) = 0$ (Bazaraa et al. (2006); Bertsekas (2016)). Então,

$$\frac{\partial L_\mu(w, n, v)}{\partial w} = c_w - \frac{\mu}{w} - \frac{\alpha v}{w} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial L_\mu(w, n, v)}{\partial n} = c_n - \frac{\mu}{n} - \frac{(1 - \alpha)v}{n} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial L_\mu(w, n, v)}{\partial v} = g(w, n) = 0. \quad (8)$$

Sejam $z_w := \frac{\mu}{w}$, $\theta_w := \frac{\alpha}{w}$, $z_n := \frac{\mu}{n}$ e $\theta_n := \frac{1 - \alpha}{n}$. Então, podemos escrever (6)–(7)–(8) como o seguinte sistema não-linear:

$$c_w - z_w - \theta_w v = 0 \quad (9)$$

$$c_n - z_n - \theta_n v = 0 \quad (10)$$

$$w^\alpha n^{1-\alpha} = \frac{\sigma}{k} \quad (11)$$

$$z_w w = \mu \quad (12)$$

$$z_n n = \mu \quad (13)$$

$$\theta_w w = \alpha \quad (14)$$

$$\theta_n n = 1 - \alpha, \quad (15)$$

onde $w, n, z_w, z_n, \theta_w, \theta_n > 0$ e $v \in \mathbb{R}$.

Note que é possível resolver o sistema não-linear acima pelo método de Newton, onde a busca por solução avança de maneira iterativa, a partir de um ponto viável, e numa direção $(\Delta w, \Delta n, \Delta z_w, \Delta z_n, \Delta \theta_w, \Delta \theta_n, \Delta v)$, a qual calculamos através da matriz Hessiana associada à função vetorial que define o sistema (Bazaraa et al., 2006; Bertsekas, 2016). Neste trabalho, assumindo que o vetor $(w, n, z_w, z_n, \theta_w, \theta_n, v)$ satisfaça o sistema anterior e $w, n, z_w, z_n, \theta_w, \theta_n > 0$, além de $v \in \mathbb{R}$, procuramos por um vetor de direção tal que o avanço com “tamanho de passo igual a um”, dado por:

$$(w + \Delta w, n + \Delta n, z_w + \Delta z_w, z_n + \Delta z_n, \theta_w + \Delta \theta_w, \theta_n + \Delta \theta_n, v + \Delta v), \quad (16)$$

continue satisfazendo o sistema prévio, isto é,

$$(z_w + \Delta z_w) + (\theta_w + \Delta \theta_w)(v + \Delta v) = c_w \quad (17)$$

$$(z_n + \Delta z_n) + (\theta_n + \Delta \theta_n)(v + \Delta v) = c_n \quad (18)$$

$$(w + \Delta w)^\alpha (n + \Delta n)^{1-\alpha} = \frac{\sigma}{k} \quad (19)$$

$$(z_w + \Delta z_w)(w + \Delta w) = \mu \quad (20)$$

$$(z_n + \Delta z_n)(n + \Delta n) = \mu \quad (21)$$

$$(\theta_w + \Delta \theta_w)(w + \Delta w) = \alpha \quad (22)$$

$$(\theta_n + \Delta \theta_n)(n + \Delta n) = 1 - \alpha. \quad (23)$$

Note que a solução do sistema acima não garante a condição de não-negatividade que cada iteração deve satisfazer. Assim, precisamos introduzir no procedimento a ser construído um parâmetro, conhecido como tamanho de passo, o qual reduz o “tamanho de passo igual a um” na direção de Newton e garante a não-negatividade de cada variável. No que se segue assumimos que ambos os insumos, água e nitrogênio, possuem a mesma elasticidade de produção $\alpha = \frac{1}{2}$. Isto é, que ambas possuem uma estimativa de contribuição na função de produção de Cobb–Douglas da ordem de 50%. Nesse sentido, o sistema anterior é modificado em:

$$(z_w + \Delta z_w) + (\theta_w + \Delta \theta_w)(v + \Delta v) = c_w \quad (24)$$

$$(z_n + \Delta z_n) + (\theta_n + \Delta \theta_n)(v + \Delta v) = c_n \quad (25)$$

$$(w + \Delta w)(n + \Delta n) = \left(\frac{\sigma}{k}\right)^2 \quad (26)$$

$$(z_w + \Delta z_w)(w + \Delta w) = \mu \quad (27)$$

$$(z_n + \Delta z_n)(n + \Delta n) = \mu \quad (28)$$

$$(\theta_w + \Delta \theta_w)(w + \Delta w) = \frac{1}{2} \quad (29)$$

$$(\theta_n + \Delta \theta_n)(n + \Delta n) = \frac{1}{2}. \quad (30)$$

Assim, procuramos $\mathbf{x} := (\Delta w, \Delta n, \Delta z_w, \Delta z_n, \Delta \theta_w, \Delta \theta_n, \Delta v)^\top$, tal que:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (31)$$

onde

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & v & 0 & \theta_w \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & v & \theta_n \\ n & w & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z_w & 0 & w & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_n & 0 & n & 0 & 0 & 0 \\ \theta_w & 0 & 0 & 0 & w & 0 & 0 \\ 0 & \theta_n & 0 & 0 & 0 & n & 0 \end{pmatrix}, \quad (32)$$

e $\mathbf{b} := (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7)^\top$, onde $f_1 := c_w - z_w - v\theta_w$, $f_2 := c_n - z_n - v\theta_n$, $f_3 := \left(\frac{\sigma}{k}\right)^2 - wn$, $f_4 := \mu - z_w w$, $f_5 := \mu - z_n n$, $f_6 := \frac{1}{2} - \theta_w w$, $f_7 := \frac{1}{2} - \theta_n n$. Em seguida, o procedimento desejado.

PROCEDIMENTO

	Dados: $k = 1.01$, $\sigma, c_w, c_n, w, n, \mu > 0$ e $\tau, \delta, \epsilon_i \in (0, 1)$, para $i = 1, 2, 3$
1	calcule $z_w, z_n, \theta_w, \theta_n$
2	enquanto <i>solução não seja encontrada</i> faça
3	$\rho_1 \leftarrow c_w - z_w - \theta_w v $; $\rho_2 \leftarrow c_n - z_n - \theta_n v $;
4	$\rho_3 \leftarrow \left \left(\frac{\sigma}{k} \right)^2 - wn \right $; $\mu \leftarrow \tau (c_w w + c_n n + 1 - \theta_w w - \theta_n n) / 4$;
5	se $\mu < 10^{-4}$ e $\rho_i < \epsilon_i$, para $i = 1, 2, 3$ então
6	pare ! <i>solução encontrada</i> ;
7	senão
8	$\mathbf{b} \leftarrow (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7)^\top$;
9	ache $(\Delta w, \Delta n, \Delta z_w, \Delta z_n, \Delta \theta_w, \Delta \theta_n, \Delta v)$ tal que (31) seja satisfeito;
10	$\beta_w \leftarrow \frac{1}{\max \{1, -\frac{\Delta w}{\delta w}\}}$; $\beta_n \leftarrow \frac{1}{\max \{1, -\frac{\Delta n}{\delta n}\}}$;
11	$\beta_z^w \leftarrow \frac{1}{\max \{1, -\frac{\Delta z_w}{\delta z_w}\}}$; $\beta_z^n \leftarrow \frac{1}{\max \{1, -\frac{\Delta z_n}{\delta z_n}\}}$;
12	$\beta_\theta^w \leftarrow \frac{1}{\max \{1, -\frac{\Delta \theta_w}{\delta \theta_w}\}}$; $\beta_\theta^n \leftarrow \frac{1}{\max \{1, -\frac{\Delta \theta_n}{\delta \theta_n}\}}$;
13	$\beta_v \leftarrow \frac{1}{\max \{1, -\frac{\Delta v}{\delta v}\}}$;
14	$w \leftarrow w + \beta_w \Delta w$; $n \leftarrow n + \beta_n \Delta n$;
15	$z_w \leftarrow z_w + \beta_z^w \Delta z_w$; $z_n \leftarrow z_n + \beta_z^n \Delta z_n$;
16	$\theta_w \leftarrow \theta_w + \beta_\theta^w \Delta \theta_w$; $\theta_n \leftarrow \theta_n + \beta_\theta^n \Delta \theta_n$;
17	$v \leftarrow v + \beta_v \Delta v$;

Note que os tamanhos de passo $\beta_w, \beta_n, \beta_z^w, \beta_z^n, \beta_\theta^w, \beta_\theta^n, \beta_v$ definidos no procedimento, garantem a não-negatividade de cada variável. Por exemplo, se $w > 0$, $\delta \in (0, 1)$ e

$$\beta_w \leftarrow \frac{1}{\max \{1, -\frac{\Delta w}{\delta w}\}},$$

então $w + \beta_w \Delta w > 0$. De fato, note que se $-\frac{\Delta w}{\delta w} > 1$, então $w + \beta_w \Delta w = w - \delta w = (1 - \delta)w > 0$ e se $-\frac{\Delta w}{\delta w} < 1$, então $\frac{\Delta w}{\delta w} > -1$, de modo que $\Delta w > -\delta w > -w$ (pois $0 < \delta < 1$ e $w > 0$). Portanto, $w + \beta_w \Delta w = w + \Delta w > 0$.

2.1. Dados Numéricos

Para testar computacionalmente o procedimento proposto, realizamos alguns ensaios numéricos usando como culturas testes: a hortense alface-americana (*Lactuca sativa*) (Silva et al., 2008), o fruteiro meloeiro (*Cucumis melo*) (Monteiro et al., 2006), a forrageira aveia (*Avena sativa*) (Oliveira Junior, 2008) e a herbácea cebola (*Allium cepa*) (Costa e Resende, 2007).

Em Silva et al. (2008), o objetivo foi estudar o efeito da água, do nitrogênio e da interação desses fatores sobre os rendimentos produtivos e econômicos da cultura alface-americana, nas condições edafoclimáticas de Lavras, sul de Minas Gerais. Nesse trabalho, foi estimada a produtividade comercial da alface-americana através de uma forma biquadrática e os custos dos insumos considerados foram: $c_w = 0,44 \left(\frac{R\$}{mm} \right)$ e $c_n = 2,09 \left(\frac{R\$}{kg} \right)$.

Em Monteiro et al. (2006), foi estudado o efeito da lâmina de água e dose de nitrogênio sobre o rendimento físico e econômico do meloeiro em Pentecoste-CE. Novamente a quantificação numérica da produção foi realizada através de uma função biquadrática, e os custos dos insumos considerados foram: $c_w = 0,134 \left(\frac{R\$}{mm} \right)$ e $c_n = 2,33 \left(\frac{R\$}{kg} \right)$.

Já em Oliveira Junior (2008), foram determinados a máxima produção e o ótimo econômico de matéria seca, em relação aos insumos lâmina de água e dose de nitrogênio, na Fazenda Água Limpa da Universidade de Brasília (UnB). Neste estudo, a resposta da aplicação dos insumos na produção de matéria seca de aveia-preta foi também quantitativamente determinada por uma função biquadrática, e os custos dos insumos considerados foram: $c_w = 1,15 \left(\frac{R\$}{mm} \right)$ e $c_n = 2,65 \left(\frac{R\$}{kg} \right)$.

Por último, em Costa e Resende (2007), foi feito um estudo extenso sobre o cultivo da cebola no Nordeste, e o cálculo da produtividade comercial da cultura foi baseada em dados obtidos das experiências de campo realizadas na Embrapa Semiárido Sistemas de Produção. Neste estudo, a quantificação numérica da produtividade foi realizada através de fórmulas empíricas, e os custos dos insumos considerados foram: $c_w = 13 \left(\frac{R\$}{mm} \right)$ e $c_n = 150 \left(\frac{R\$}{kg} \right)$.

É importante destacar que destes trabalhos usamos apenas os dados referentes aos custos da lâmina de água e dose de nitrogênio, e não os referentes às funções de produção. Por isso, não podemos comparar os resultados aqui obtidos com os apresentados nesses artigos. Mais ainda, note que realmente são os custos dos insumos que precisamos conhecer para rodar o programa $P(\sigma)$. Com relação ao parâmetro pré-fixado, consideramos aproximações médias de cada cultura no momento.

3. Resultados e Discussão

A Tabela 1 contém a lâmina de água e a dose de nitrogênio ótimas que minimizam o custo da cultura de alface.

Tabela 1: Solução ótima (w^*, n^*) com custo mínimo para a alface.

$\sigma (kg \cdot ha^{-1})$	$w^* (mm)$	$n^* (kg)$	$c_w w^* + c_n n^* (R\$)$
1.250	2.697,34	567,86	2.373,66
1.350	2.913,13	613,29	2.563,55
1.550	3.344,70	704,15	2.943,34
1.750	3.776,27	795,00	3.323,12

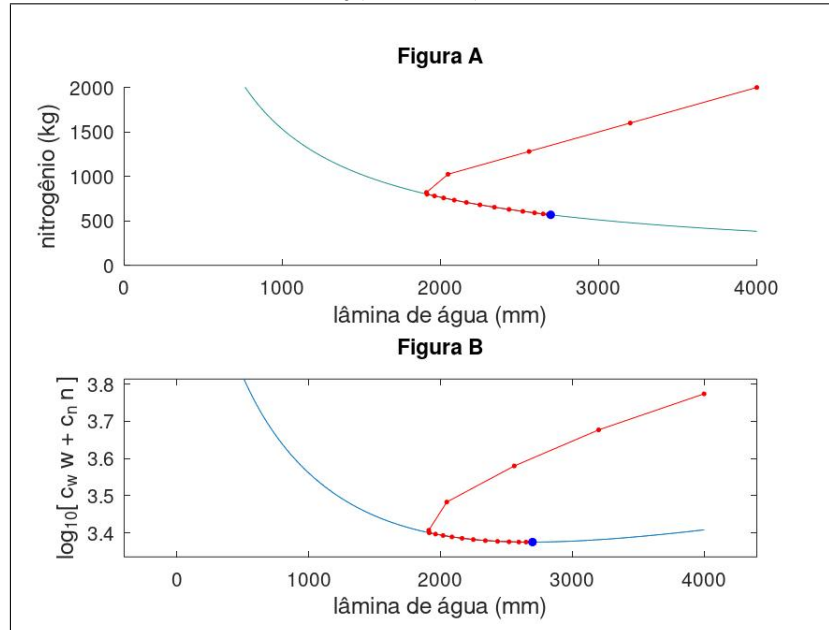
Fonte: os autores.

Aqui os níveis de produção pré-fixados (σ) variam entre $1.250 kg \cdot ha^{-1}$ e $1.750 kg \cdot ha^{-1}$. Note que para um primeiro incremento de $100 kg \cdot ha^{-1}$ no nível de produção $\sigma = 1.250 kg \cdot ha^{-1}$, necessitamos aumentar $215,79 mm$ na lâmina de água e $45,43 kg$ na dose de nitrogênio, representando um aumento $R\$ 189,89$ nos custos dos insumos. Já quando fazemos um aumento de $200 kg \cdot ha^{-1}$ nos níveis de produção $\sigma = 1.550 kg \cdot ha^{-1}$ e $\sigma = 1.750 kg \cdot ha^{-1}$, necessitamos dobrar a lâmina de água para $431,57 mm$ e a dose de nitrogênio para $90,86 kg$, representando um aumento de $R\$ 379,79$ nos custos dos insumos. A Figura 1A mostra a curva da restrição de função multiplicativa de Cobb–Douglas $kw^\alpha n^{1-\alpha}$ para $\sigma = 1.250 kg \cdot ha^{-1}$, e os pontos gerados (w, n) pelo procedimento implementado, convergindo para a solução ótimo sobre a curva.

Em relação ao valor ótimo da função objetivo do problema não-linear dado por $P(\sigma)$, a Figura 1B mostra a curva logarítmica da função objetivo $(h(w, n) = c_w w + c_n n)$ sobre a curva de restrição dada pela função de Cobb–Douglas e os pontos gerados iterativamente pelo procedimento e convergindo para o valor ótimo.

A Tabela 2 contém a lâmina de água e a dose de nitrogênio ótimas que minimizam os custos dos insumos para a cultura do melão. Aqui os níveis de produção pré-fixados (σ) variam uniformemente de $650 kg \cdot ha^{-1}$ até $950 kg \cdot ha^{-1}$ com uma diferença de $R\$ 100 kg \cdot ha^{-1}$, e podemos observar que a diferença entre um nível de produção (σ) e outro, com relação à lâmina de água é $412 mm$ e $23,74 kg$ com relação à dose de nitrogênio, o que representa um aumento de $R\$ 110,65$ nos custos dos insumos.

Figura 1: A: curva da restrição da função de Cobb–Douglas e iterações geradas pelo procedimento, primeiro fora da curva e então em cima da curva, convergindo para o ponto ótimo (2.697, 4; 567, 86). B: logaritmo dos custos sobre a restrição e iterações geradas pelo procedimento, primeiro fora da curva e então em cima da curva, convergindo para o valor ótimo $\log_{10}(2.373, 66) \simeq 3, 38$.



Fonte: os autores.

Tabela 2: Solução ótima (w^*, n^*) com custo mínimo para o melão.

$\sigma(kg \cdot ha^{-1})$	$w^*(mm)$	$n^*(kg)$	$c_w w^* + c_n n^* (R\$)$
650	2.683,59	154,34	719,20
750	3.096,46	178,08	829,85
850	3.509,32	201,82	940,50
950	3.922,18	225,57	1.051,14

Fonte: os autores.

A Figura 2A mostra a curva da restrição da função de Cobb–Douglas $kw^\alpha n^{1-\alpha}$ para $\sigma = 750 kg \cdot ha^{-1}$ e os pontos gerados pelo procedimento implementado, convergindo para a solução ótima sobre a curva.

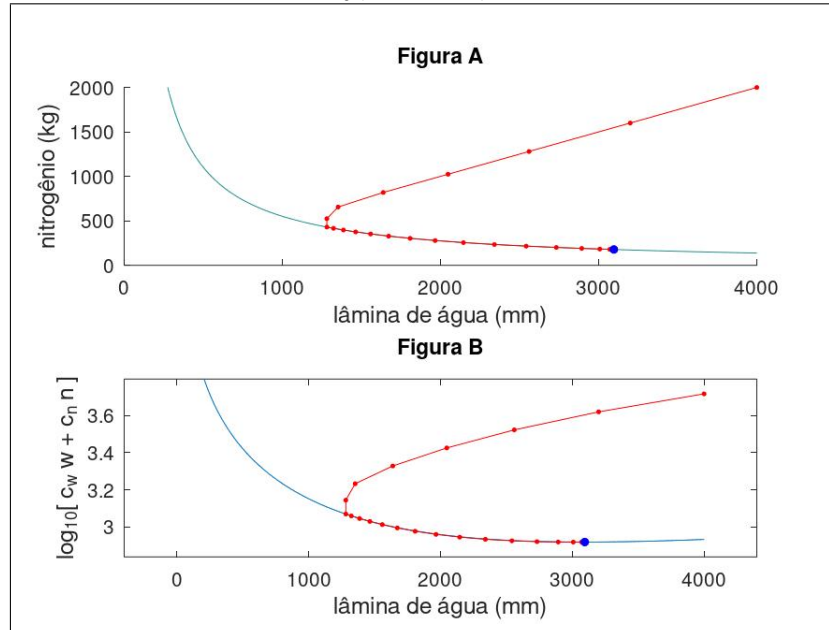
A Tabela 3 contém a lâmina de água e a dose de nitrogênio ótimos que minimizam os custos dos insumo para a cultura da aveia. Aqui o nível de produção pré-fixado (σ) varia uniformemente de $550 kg \cdot ha^{-1}$ até $2.200 kg \cdot ha^{-1}$ com uma diferença de $550 kg \cdot ha^{-1}$. Podemos observar que a diferença entre um nível de produção (σ) e outro, em relação à lâmina de água é de 826, 64 mm e em relação à dose de nitrogênio de 358, 73 kg, o que representa um aumento de R\$ 1.901, 27 nos custos dos insumos.

Tabela 3: Solução ótimas (w^*, n^*) com custo mínimo para a aveia.

$\sigma(kg \cdot ha^{-1})$	$w^*(mm)$	$n^*(kg)$	$c_w w^* + c_n n^* (R\$)$
550	826,64	358,73	1.901,27
1.100	1.653,28	717,46	3.802,53
1.650	2.479,91	1.076,19	5.703,80
2.200	3.306,55	1.434,92	7.605,07

Fonte: os autores.

Figura 2: A: curva da restrição da função de Cobb–Douglas e iterações geradas pelo procedimento, primeiro fora da curva e então em cima da curva, convergindo para o ponto ótimo (3.096,46; 178,08). B: logaritmo dos custos sobre a restrição e iterações geradas pelo procedimento, primeiro fora da curva e então em cima da curva, convergindo para o valor ótimo $\log_{10}(829,8513) \simeq 2,9190$.



Fonte: os autores.

A Figura 3A mostra a curva da restrição da função de Cobb–Douglas $kw^\alpha n^{1-\alpha}$ para $\sigma = 1.650 \text{ kg} \cdot \text{ha}^{-1}$ e os pontos (w, n) gerados pelo procedimento implementado, convergindo para a solução ótima sobre a curva.

Finalmente, a Tabela 4 contém a lâmina de água e a dose de nitrogênio ótimas que minimizam os insumos da culture de cebola.

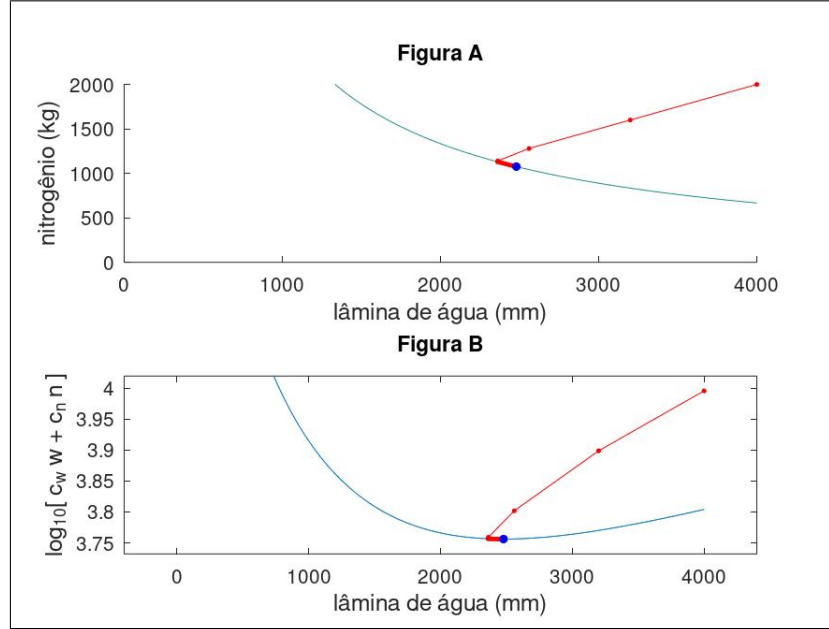
Tabela 4: Solução ótima (w^*, n^*) com custo mínimo para a cebola.

$\sigma (\text{kg} \cdot \text{ha}^{-1})$	$w^* (\text{mm})$	$n^* (\text{kg})$	$c_w w^* + c_n n^* (\text{R\$})$
447	1.503,35	130,29	39.087,10
570	1.917,02	166,14	49.842,61
680	2.286,98	198,20	59.461,36
894	3.006,70	260,58	78.174,20

Fonte: os autores.

Aqui os níveis de produção pré-fixados (σ) variam entre $447 \text{ kg} \cdot \text{ha}^{-1}$ e $894 \text{ kg} \cdot \text{ha}^{-1}$. Note que para um primeiro incremento de $123 \text{ kg} \cdot \text{ha}^{-1}$ no nível pré-fixado desejado $\sigma = 447 \text{ kg} \cdot \text{ha}^{-1}$, necessitamos um aumento de $413,67 \text{ mm}$ na lâmina de água e de $35,85 \text{ kg}$ na dose de nitrogênio, o que representa um aumento no custos dos insumos de $\text{R\$ } 10.755,51$. Por outro lado, quando fazemos um incremento de $110 \text{ kg} \cdot \text{ha}^{-1}$ no nível de produção desejado $\sigma = 570 \text{ kg} \cdot \text{ha}^{-1}$, necessitamos um aumento de $369,96 \text{ mm}$ na lâmina de água e de $32,06 \text{ kg}$ na dose de nitrogênio, o que representa um aumento de $\text{R\$ } 9.618,75$ nos custos dos insumos. Finalmente, quando fazemos um aumento de $214 \text{ kg} \cdot \text{ha}^{-1}$ no nível de produção desejado $\sigma = 680 \text{ kg} \cdot \text{ha}^{-1}$, necessitamos um aumento de $719,72 \text{ mm}$ na lâmina de água e de $62,38 \text{ kg}$ na dose de nitrogênio, o que representa um aumento de $\text{R\$ } 18.712,84$ nos custos dos insumos.

Figura 3: A: curva da restrição da função de Cobb–Douglas e iterações geradas pelo procedimento, primeiro fora da curva e então em cima da curva, convergindo para o ponto ótimo (2.479, 91; 1.076, 19). B: logaritmo dos custos sobre a restrição e iterações geradas pelo procedimento, primeiro fora da curva e então em cima da curva, convergindo para o valor ótimo $\log_{10}(5.703, 8027) \simeq 3,7562$.



Fonte: os autores.

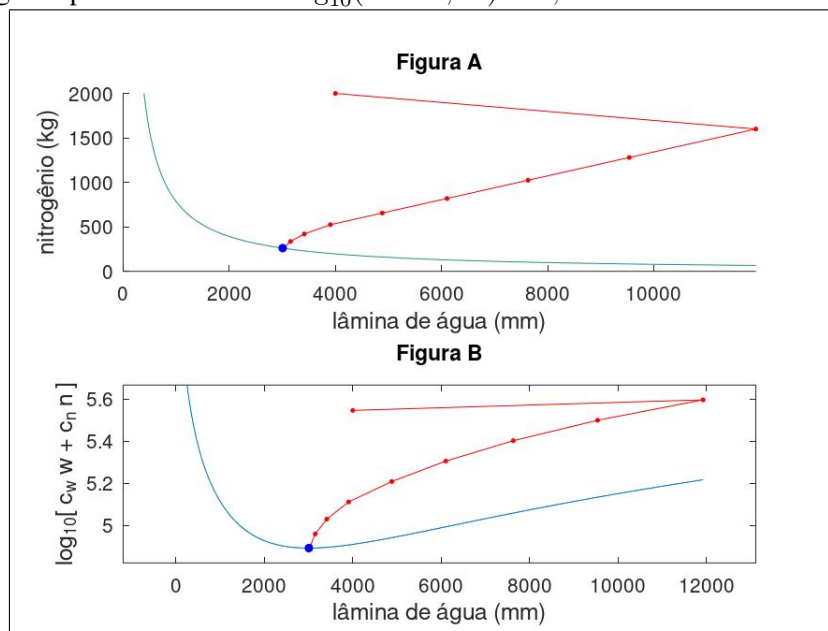
A Figura 4A mostra a curva da restrição da função de Cobb–Douglas $kw^\alpha n^{1-\alpha}$, para $\sigma = 894 \text{ kg} \cdot \text{ha}^{-1}$ e os pontos (w, n) gerados pelo procedimento implementado, convergindo para a solução ótima sobre a curva. Em relação à função objetivo $(h(w, n) = c_w w + c_n n)$ do problema não-linear $P(\sigma)$, a Figura 4B mostra a curva logarítmica da função objetivo sobre a restrição da função de Cobb–Douglas e os pontos (w, n) gerados iterativamente pelo procedimento, convergindo para o valor ótimo.

Em relação à discussão dos resultados obtidos (ver tabelas e figuras), podemos observar em primeiro lugar que para cada cultura e ensaio numérico realizado, qualquer aumento no nível de produção pré-fixado ou desejado (σ), leva naturalmente a um aumento na lâmina de água ótima (w^*) e dose de nitrogênio ótima (n^*), e portanto a um aumento no custo ótimo dos insumos ($c_w w + c_n n$). Como dissemos, nos ensaios numéricos praticados, inicialmente consideramos uma aproximação média da produção de cada cultura: $\sigma = 1.250 \text{ kg} \cdot \text{ha}^{-1}$ para alface-americana, $\sigma = 650 \text{ kg} \cdot \text{ha}^{-1}$ para o melão, $\sigma = 550 \text{ kg} \cdot \text{ha}^{-1}$ para a aveia e $\sigma = 447 \text{ kg} \cdot \text{ha}^{-1}$ para a cebola. Em seguida, fizemos aumentos da produção pré-fixada de forma não necessariamente uniforme, como foi nos casos das culturas alface-americana, aveia e cebola. Para estas culturas consideramos simplesmente pequenos aumentos percentuais. Finalmente, não deixa de ser interessante observar que nas culturas alface-americana, melão e aveia, os aumentos nos custos ótimos encontrados são discretamente pequenos em comparação com a cultura da cebola. Sem dúvida, isso se deve ao grande aumento nos custos da lâmina de água e dose de nitrogênio de essa cultura em comparação com o resto: $c_w = 13 \left(\frac{\text{R\$}}{\text{mm}} \right)$ e $c_n = 150 \left(\frac{\text{R\$}}{\text{kg}} \right)$.

4. Conclusões

Apresentamos um procedimento computacional que minimiza o custo de dois insumos agrícolas essenciais em qualquer lavoura, água e nitrogênio, para um nível pré-fixado de produti-

Figura 4: A: curva da restrição da função de Cobb–Douglas e iterações geradas pelo procedimento, primeiro fora da curva e então em cima da curva, convergindo para o ponto ótimo (3.006, 70; 260, 58). B: logaritmo dos custos sobre a restrição e iterações geradas pelo procedimento, primeiro fora da curva e então em cima da curva, convergindo para o valor ótimo $\log_{10}(78.174, 20) \simeq 4, 89$.



Fonte: os autores.

dade da hortense alface, o fruteiro meloeiro, a forrageira aveia e a herbacea cebola. Baseamos o procedimento em uma “hibridez” entre o método barreira logarítmica e o método de Lagrange, e que em geral, mostrou convergência e consistência numérica. Considerando que os preços e demandas dos insumos água e nitrogênio crescem a cada dia, e sabendo que eles representam uma calamidade lucrativa para o produtor brasileiro, se faz necessário desenvolver procedimentos computacionais simples de implementar, capazes de informar ao produtor o quanto é o mínimo a ser gasto nesses insumos para alcançar uma determinada produção pré-fixada. Nessa direção, é importante ressaltar que o procedimento computacional aqui apresentado representa uma contribuição para a tomada de decisões do produtor agrícola. Mais ainda, as tabelas apresentadas mostram ao produtor a lâmina de água e dose de nitrogênio ótimas com custo mínimo, quando é realizado um aumento na produtividade média pré-fixada. Já as figuras descrevem uma curva de pontos no plano gerados iterativamente pelo procedimento e convergindo a uma solução ótima aproximada de cada $P(\sigma)$. Novamente, é importante observar que para rodar computacionalmente os programas não-lineares $P(\sigma)$, apenas necessitamos conhecer os custos atuais dos insumos lâmina de água e dose de nitrogênio (c_w, c_n). Novamente, destacamos que não foi possível fazer nenhuma comparação dos resultados obtidos com outros trabalhos da literatura, por não encontrar (até o momento da finalização deste artigo) modelos semelhantes com o aqui apresentado. Finalmente, seria interessante realizar novos testes numéricos para outras situações da elasticidade dos insumos, por exemplo, onde a contribuição da lâmina de água seja da ordem de 30% e da dose de nitrogênio de 70% entre outros.

Referências

Aguilera, E., Lassaletta, L., Sanz-Cobena, A., Garnier, J., e Vallejo, A. The potential of organic fertilizers and water management to reduce N₂ O emissions in mediterranean climate cropping

- systems: a review. *Agriculture, Ecosystems and Environment*, v. 164, p. 32–52, 2013.
- Bazaraa, M. S., Sherali, H. D., e Shetty, C. M. *Nonlinear Programming*. Hoboken, New Jersey: Wiley-Interscience, 3rd edition, 2006.
- Bertonha, A., Frizzzone, J. A., e Martins, E. N. Irrigação e adubação nitrogenada na produção de laranja-pera. *Acta Scientiarum*, v. 21, n. 3, p. 537–542, 1999.
- Bertsekas, D. P. *Nonlinear Programming*. Belmont, Mass.: Athena, 3rd edition, 2016.
- Besanko, D. e Braeutigan, R. R. *Microeconomics*. Hoboken, New Jersey: Wiley, 5th edition, 2015.
- Carvalho, D. F., Delgado, A. R. S., de Oliveira, R. F., da Silva, W., e do Forte, V. L. Maximização da produção e da receita agrícola com limitações de água e nitrogênio utilizando método de pontos interiores. *Revista Engenharia Agrícola*, v. 29, n. 2, p. 321–327, 2009.
- Cobb, C. W. e Douglas, P. H. A theory of production. *American Economic Review*, v. 18, n. 1, p. 139–165, 1928.
- Costa, N. D. C. e Resende, G. M. d. *Cultivo da cebola no Nordeste*. Brasília: Embrapa Semi-Árido, 2007.
- Da Motta, R. S. *Manual para valoração econômica de recursos ambientais*. Brasília: Ministério do Meio Ambiente, dos Recursos Hídricos e da Amazônia Legal, 1998.
- Damodar, N. G. *Basic Economics*. New York: McGraw Hill, 2003.
- De Castro, R. P., Costa, R. N. T., da Silva, L. A. C., e Gomes Filho, R. R. Modelos de decisão para otimização econômica do uso da água em áreas irrigadas da fazenda experimental Vale do Curu, Pentecoste-CE. *Irriga, Botucatu*, v. 12, n. 3, p. 377–392, 2007.
- Debertin, D. L. *Agricultural production economics*. Lexington, KY: Createspace, 2012.
- Delgado, A. R. S. e Ventura, S. D. Maximização da utilidade produtiva dos insumos agrícolas água e nitrogênio utilizando Cobb–Douglas. *PECEN*, v. 6, n. 1865, p. 1–11, 2022.
- English, M. e Raja, S. N. Perspective on deficit irrigation. *Agricultural Water Management*, v. 32, p. 1–14, 1996.
- Frizzzone, J. A., Andrade, A. S., de Souza, J. L. M., e Zocoler, J. L. *Planejamento de irrigação. Análise de decisão de investimentos*. Brasília: EMBRAPA, 2005.
- Frizzzone, J. A., Coelho, R. D., Dourado, D. N., e Soliane, R. Linear programming model to optimize the water resource use in irrigation projects: an application to the Senator Nilo Coelho Project. *Sci. Agric. Piracicaba*, v. 54, p. 136–148, 1995.
- Li, J. e Rao, M. Field evaluation of crop yield as affected by nonuniformity of sprinkler-applied water and fertilizers. *Agriculture Water Management*, v. 59, p. 1–13, 2003.
- Lopes, A. S. e Guilherme, L. R. G. *Uso eficiente de fertilizantes e corretivos agrícolas: aspectos agrônômicos*. São Paulo: ANDA, 3rd edition, 2000.
- Monteiro, R. O. C., Colares, D. S., Costa, T. R. N., Leão, M. C. S., e de Aguiar, J. V. Função de resposta do meloeiro a diferentes lâminas de irrigação e doses de nitrogênio. *Horticultura Brasileira*, v. 24, n. 4, p. 455–459, 2006.

- Monteiro, R. O. C., Nonato, R., Leão, M. C. S., e de Aguiar, J. V. Aspectos econômicos da produção de melão submetido a diferentes lâminas de irrigação e doses de nitrogênio. *Irriga*, v. 12, n. 3, p. 364–376, 2007.
- Nogueira, J. M., Medeiros, A. A., e De Arruda, F. S. T. Valoração Econômica do Meio Ambiente: Ciência ou Empiricismo? *Brasília: Cadernos de Ciência & Tecnologia*, v. 17, n. 2, p. 81–115, 2000.
- Oliveira Junior, M. *Análise econômica e produção da forragem de aveia preta em resposta a água e nitrogênio*. Dissertação (Mestrado em Ciências Agrárias) - Faculdade de Agronomia e Medicina Veterinária, Universidade de Brasília, Brasília-DF, 2008.
- Paz, V. P. S., Teodoro, R. E. F., e Mendonça, F. C. Recursos hídricos, agricultura irrigada e meio ambiente. *Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental*, v. 4, n. 3, p. 465–473, 2000.
- Pearce, R. E. e Turner, R. K. *Economics of Natural Resources and the Environment*. Baltimore, Maryland: The John Hopkins University Press, 1990.
- Pereira, O. C. N., Bertonha, A., Freitas, P. S. L., Gonçalves, A. C. A., Rezende, R., e Silva, F. A. Produção de alface em função de água e nitrogênio. *Acta Scientiarum Agronomy, Maringá*, v. 25, n. 2, p. 381–387, 2003.
- Pires, R. C. M., Sakai, E., Arruda, F. B., e Folegatti, M. V. Necessidades hídricas das culturas e manejo da irrigação. *Série Engenharia Agrícola*, v. 1, p. 410, 2001.
- Rodrigues, N. L. e Zaccaria, D. *Agricultura irrigada*. Fortaleza: INOVAGRI 1a edition, 2020.
- Silva, P. A. M., Pereira, G. M., Reis, R. P., Lima, L. A., e Taveira, J. H. S. Função de resposta da alface americana aos níveis de água e adubação nitrogenada. *Ciência e Agrotecnologia*, v. 32, n. 4, p. 1266–1271, 2008.
- Vaggi, G. e Groenewegen, P. *A Concise History of Economic Thought*. London, UK: Palgrave Macmillan, 2003.
- Varian, H. *Microeconomia Intermediária*. São Paulo: Verlag Dashöfer, 8th edition, 2010.