

## UMA INTRODUÇÃO À TEORIA DOS JOGOS ALGORÍTMICA<sup>1</sup>

**Francisco J. M. Silva<sup>a\*</sup> e Rafael C. S. Schouery<sup>a</sup>**

<sup>a</sup>Instituto de Computação,  
Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, Campinas-SP, Brasil.

Recebido 15/11/2018, aceito 01/12/2018

### RESUMO

Neste tutorial introduzimos alguns dos conceitos da Teoria dos Jogos Algorítmica, uma área de pesquisa que vem se destacando nos últimos anos. Apresentamos um jogo de formação de redes e analisamos sua estabilidade através de uma das definições mais importantes da área: o equilíbrio de Nash. Analisamos então o quão ruim as soluções em equilíbrio podem ser quando comparadas a uma solução de custo social ótimo através de duas medidas de desempenho, o Preço da Anarquia e Preço da Estabilidade. Por fim, esperamos que esta breve introdução ao tema possa despertar o interesse pela área e que o leitor interessado possa aprofundar-se mais na área através dos livros avançados recomendados no texto.

**Palavras-chave:** Teoria dos jogos, Equilíbrio de Nash, Projeto de redes.

### ABSTRACT

In this tutorial, we introduce some of the concepts of Game Theory, a research area that has been receiving special attention in recent years. We present a network formation game and analyze its stability through one of the most important definitions of the area: Nash Equilibrium. We then analyze how bad the solutions in Equilibrium can be when compared to an optimal social cost through two measures of performance, the Price of Anarchy and the Price of Stability. Finally, we hope that this brief introduction to the topic may stir interest in the area and that the interested reader can deepen his knowledge in the area through the advanced books recommended in the text.

**Keywords:** Game theory, Nash equilibrium, Network design.

---

\*Autor para correspondência. E-mail: francisco.silva@ic.unicamp.br  
DOI: 10.4322/PODes.2018.005

<sup>1</sup>Todos os autores assumem a responsabilidade pelo conteúdo do artigo.

## 1. Introdução

A Teoria dos Jogos é uma área da matemática que modela e analisa interações entre agentes (pessoas, algoritmos, etc.) em situações onde a melhor ação a ser realizada por um agente depende das ações realizadas por outros agentes. Isto é, para maximizar o seu lucro ou minimizar o seu custo, o agente precisa considerar não apenas suas próprias escolhas, mas também as escolhas que podem ser realizadas pelos outros agentes envolvidos.

A área foi fundada por Morgenstern e Von Neumann (1953) com a publicação do livro “*Theory of Games and Economic Behavior*”, mas ganhou mais notoriedade após a tese de doutorado de John Nash e a publicação do seu artigo sobre equilíbrio em 1950 (Nash, 1950).

Hoje, trata-se de uma área muito importante para a economia, importância essa que pode ser atestada pelas premiações com o Nobel em Ciências Econômicas dados a pesquisadores da área (Nobelprize.org, 2018): Nash, Harsanyi e Selten em 1994, Aumann e Schelling em 2005, Hurwicz, Maskin e Myerson em 2007, Roth e Shapley em 2012, e Tirole em 2014.

Porém sua importância não está limitada apenas a economia. A Teoria dos Jogos ganhou importância também em áreas como biologia (por exemplo, na modelagem de processos evolutivos), na ciência política (por exemplo, em estudos de processos eleitorais), entre outras.

Mais recentemente, a Teoria dos Jogos ganhou importância também na computação, sendo batizada de Teoria dos Jogos Algorítmica, com aplicações em teoria da computação, redes, inteligência artificial, aprendizado de máquina e otimização, para citar algumas áreas.

Em particular, na pesquisa operacional e na otimização combinatória é comum considerarmos problemas de minimização ou maximização sem considerar os agentes envolvidos. Usualmente se computa uma solução ótima ou próxima de uma solução ótima a partir de uma visão global do sistema. Porém, pode ser que os agentes envolvidos tenham um ganho maior ou custo menor ao desviar da solução proposta.

Exemplos incluem usuários de sistemas de transporte, que preferirão seguir por caminhos mais curtos ou mais baratos ao invés do que foi proposto pelo sistema, o que pode levar a congestionamentos; e, usuários de sistemas computacionais, que preferirão alocar suas tarefas em computadores com menor carga de trabalho para que suas tarefas terminem antes, o que pode levar a um mal balanceamento de carga das máquinas.

Assim, nessas situações e em muitas outras, torna-se necessário levar em consideração o comportamento individual dos agentes, alinhando os interesses do sistema com os interesses dos agentes, ideia que foi descrita originalmente por Nisan e Ronen (2001) (em uma tradução livre):

*Consideramos problemas algorítmicos ... onde não podemos assumir que os participantes seguirão o algoritmo, mas sim o seu interesse próprio. ... o projetista do algoritmo precisa garantir a priori que os interesses dos agentes são melhor atendidos ao agir corretamente.*

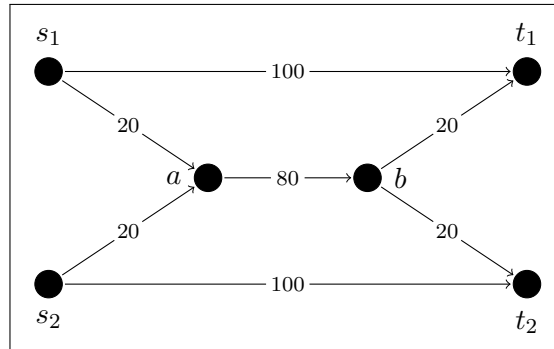
Se não é possível ou desejado projetar o algoritmo considerando os interesses individuais dos agentes participantes, outra opção é analisar qual é o impacto deste comportamento nos sistemas e algoritmos já existentes. Neste texto focamos nessa segunda opção com o objetivo de compreender melhor o comportamento dos agentes em uma situação já existente.

## 2. Jogos

Começamos com um exemplo para motivar as definições a seguir. Suponha que duas pessoas, as quais chamaremos de jogadores, deseja, cada qual, enviar um produto de uma origem para um destino, de forma que o jogador 1 deseja enviar o seu produto de  $s_1$  para  $t_1$  e o jogador 2 deseja enviar o seu produto de  $s_2$  para  $t_2$ .

Cada jogador  $i$  pode enviar o seu produto diretamente de  $s_i$  para  $t_i$  por um custo de 100, ou então pode enviar o seu produto para um depósito  $a$  (com um custo de 20), sendo que os produtos

Figura 1: Exemplo de um jogo de dois jogadores que podem optar por compartilhar ou não os custos de transporte.



Fonte: Elaborada pelos autores.

no depósito  $a$  serão posteriormente transferidos para um depósito  $b$  (com um custo total de 80) e, então, o produto do jogador  $i$  será entregue no seu destino  $t_i$  por um custo adicional de 20. Veja a Figura 1 para o exemplo.

Assim, cada jogador  $i$  precisa escolher entre o caminho  $s_i t_i$  e o caminho  $s_i a b t_i$ . Porém, caso o jogador 1 escolha o caminho  $s_1 a b t_1$  e o jogador 2 escolha o caminho  $s_2 a b t_2$ , então o custo de transporte de  $a$  para  $b$  para cada jogador será de 40, de forma que cada jogador pagará um total de 80 para o transporte de seu pacote, ou seja, mais barato do que enviar o pacote pelo caminho  $s_i t_i$ .

Este é um exemplo típico de um jogo da Teoria dos Jogos. Temos um conjunto  $N = \{1, 2\}$  de jogadores que escolhem entre caminhos possíveis para entregar o seu pacote (o que chamamos de estratégias ou ações), sendo que o jogador  $i$  pode escolher entre os caminhos no conjunto  $S_i = \{s_i t_i, s_i a b t_i\}$ , com a propriedade que o custo obtido por um jogador depende não apenas de sua escolha, mas também da escolha do outro jogador. A Tabela 1 apresenta tais custos de maneira resumida.

Tabela 1: Forma matricial do jogo exibido na Figura 1. Na diagonal inferior esquerda indicamos o custo do jogador 1 e na diagonal superior direita indicamos o custo do jogador 2.

	2	
1	$s_2 t_2$	$s_2 a b t_2$
$s_1 t_1$	100	120
$s_1 a b t_1$	100	80

Fonte: Elaborada pelos autores.

Formalmente, um *jogo*<sup>1</sup> é uma tupla  $(N, \mathcal{S}, c)$ , em que  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  é o conjunto de jogadores,  $\mathcal{S} = \times_{i=1}^n S_i$  é o conjunto de perfis de estratégias, sendo que cada  $S_i$  representa o conjunto de estratégias do jogador  $i$ . Tem-se ainda  $c : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , em que  $c_i(\sigma)$  é o custo do jogador  $i$  para o perfil de estratégia  $\sigma$ .

No exemplo da Figura 1, um exemplo de perfil de estratégias é  $(s_1 t_1, s_2 t_2)$ , em que o jogador 1 escolhe o caminho  $s_1 t_1$  e o jogador 2 escolhe o caminho  $s_2 t_2$ . Os outros perfis são  $(s_1 t_1, s_2 a b t_2)$ ,  $(s_1 a b t_1, s_2 t_2)$ , e  $(s_1 a b t_1, s_2 a b t_2)$ . De acordo com a descrição do jogo na Tabela 1,

<sup>1</sup>Nesse texto consideramos apenas jogos simultâneos, em que todos os jogadores escolhem suas estratégias ao mesmo tempo e nos quais a quantidade de jogadores é finita. Existem na literatura outros tipos de jogos, como os repetidos (o mesmo jogo é jogado várias vezes), os sequenciais (os jogadores se alternam para jogar), entre outros.

tem-se que  $c_1(s_1t_1, s_2abt_2) = 100$  e  $c_1(s_1abt_1, s_2abt_2) = 80$ . Assim, para cada perfil  $\sigma \in \mathcal{S}$ , ou seja, cada combinação de escolha dos jogadores, o jogador  $i$  tem um custo  $c_i(\sigma)$ . Um perfil de estratégias também é chamado de *resultado do jogo*, já que é uma das possíveis escolhas que os jogadores podem fazer coletivamente.

Assumiremos que os jogadores são *egoístas*, no sentido que eles buscarão escolher uma estratégia que minimiza os seus custos sem se importarem com o custo dos outros jogadores. Em outros caos, estamos interessados em jogos em que o jogador deseja maximizar seu ganho (o que é chamado de *utilidade* na literatura) ao invés de minimizar seu custo. Podemos, então, definir um jogo considerando funções de utilidade  $u_i : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , para cada jogador  $i$ , ao invés de funções de custo  $c_i$ . As definições são equivalentes, já que o ganho é uma perda negativa e vice-versa. Assim, basta definir  $c_i = -u_i(\sigma)$  e utilizar a definição anteriormente apresentada.

Antes de apresentar novos conceitos, introduziremos algumas notações a serem utilizadas. Seja  $\sigma \in \mathcal{S}$ , denotamos por  $\sigma_{-i}$  o vetor  $(\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n)$ , isto é, o vetor  $\sigma$  cuja  $i$ -ésima posição é ocultada. Tal notação será útil para fixar a escolha de estratégia dos outros jogadores mantendo livre a estratégia do jogador  $i$ . Denotamos por  $\mathcal{S}_{-i}$  o conjunto  $S_1 \times \dots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \dots \times S_n$ , isto é, o conjunto de possíveis  $\sigma_{-i}$ . Denotamos por  $(\sigma'_i, \sigma_{-i})$  o vetor  $(\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, \sigma'_i, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n)$ , isto é, o vetor em que o jogador  $i$  joga  $\sigma'_i$  e os outros jogadores jogam de acordo com  $\sigma_{-i}$ . Note que  $\sigma = (\sigma_i, \sigma_{-i})$ . Por fim, consideramos que  $c_i((\sigma'_i, \sigma_{-i}))$  é o mesmo que  $c_i(\sigma'_i, \sigma_{-i})$ .

Voltando ao jogo do exemplo na Figura 1, note que se o jogador 1 souber que o jogador 2 escolherá o caminho  $s_2abt_2$ , então ele preferirá escolher o caminho  $s_1abt_1$  ao invés do caminho  $s_1t_1$ . Nesse caso, dizemos que  $s_1abt_1$  é uma resposta ótima para  $s_2abt_2$ .

De forma geral, dizemos que uma estratégia  $\sigma_i$  é uma resposta ótima para  $\sigma_{-i}$  se ela minimiza o custo do jogador  $i$  quando os outros jogadores escolhem  $\sigma_{-i}$ . Formalmente, seja  $i \in N$  e  $\sigma_{-i} \in \mathcal{S}_{-i}$ , dizemos que  $\sigma_i \in S_i$  é uma *resposta ótima* para  $\sigma_{-i} \in \mathcal{S}_{-i}$  se, para todo  $\sigma'_i \in S_i$ , temos que  $c_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \leq c_i(\sigma'_i, \sigma_{-i})$ .

Note que para o perfil  $(s_1abt_1, s_2abt_2)$ , ambos os jogadores estão jogando respostas ótimas. Assim, nenhum dos jogadores deseja mudar sua estratégia, pois isso não levaria a um lucro maior. Chamamos tal perfil de um equilíbrio de Nash. Formalmente, um perfil  $\sigma$  é um *equilíbrio de Nash* se, para todo jogador  $i$ ,  $\sigma_i$  é uma resposta ótima para  $\sigma_{-i}$ .

O jogo apresentado na Figura 1 tem um outro equilíbrio de Nash, que ocorre quando o jogador 1 escolhe  $s_1t_1$  e o jogador 2 escolhe  $s_2t_2$ , já que se o jogador  $i$  mudar de estratégia para  $s_iabt_i$  ele terá um custo de 120 ao invés de 100. Assim, nenhum jogador pode mudar individualmente e melhorar o seu resultado.

Apesar desse jogo ter dois equilíbrios, existem jogos sem nenhum equilíbrio de Nash<sup>2</sup>. Porém, Nash (1951) provou que se permitimos aos jogadores que eles escolham suas estratégias de forma probabilística ao invés de determinística (da forma que estamos considerando até o momento), então todo jogo com um número finito de jogadores cada, qual com um conjunto finito de estratégias, admite o chamado equilíbrio misto de Nash, em que a palavra “misto” indica a possibilidade de usar aleatoriedade na escolha da estratégia.

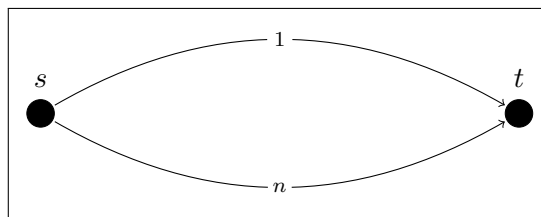
O conceito de equilíbrio de Nash é muito importante para a Teoria dos Jogos, pois ele ajuda a analisar o comportamento (geralmente egoísta) dos jogadores em situações reais do dia-a-dia. Vale salientar que, mesmo não sendo claro se os jogadores atingirão (ou não) tal equilíbrio, este conceito tem ajudado na evolução da Teoria dos Jogos e, conseqüentemente, no entendimento de várias situações econômicas reais (Morgenstern e Von Neumann, 1953).

Como a maioria dos jogos possuem um enorme número de perfis de estratégias<sup>3</sup>, torna-se indispensável um conceito para classificar ou comparar a qualidade de diferentes perfis de

<sup>2</sup>Por exemplo, considere o jogo “Pedra, Papel e Tesoura”, em que o jogador vencedor ganha 1, o perdedor ganha -1 e quem empata ganha 0.

<sup>3</sup>De fato, mesmo jogos de  $n$  jogadores, em que cada jogador tem duas estratégias, há um total de  $2^n$  perfis de estratégia diferentes.

Figura 2: Exemplo de uma instância do jogo de conexão global, com  $s_i = s$  e  $t_i = t$  para todo jogador  $i$ .



Fonte: Elaborada pelos autores.

estratégias de um jogo para a sociedade. Assim, outro conceito importante é a função de custo social  $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ , que é responsável por avaliar a qualidade dos perfis de estratégias para a sociedade.

Em particular, quando estamos lidando com jogos de minimização de custos, o custo ótimo social é o custo de um perfil de estratégias  $\sigma \in \mathcal{S}$  tal que  $f(\sigma)$  é mínimo. Retornando ao exemplo da Figura 1, poderíamos definir  $f(\sigma) = \sum_{i \in N} c_i(\sigma)$  como sendo a função de custo social do jogo. Então, observe que o equilíbrio  $\sigma = (s_1 t_1, s_2 t_2)$  possui custo social  $f(\sigma) = 200$ , enquanto que o custo social ótimo é  $f(\sigma^*) = 160$ , com  $\sigma^* = (s_1 a b t_1, s_2 a b t_2)$ .

### 3. Formação de Redes

Nesta seção analisaremos jogos de formação de redes, mais especificamente, apresentaremos os chamados jogos de conexão global, que englobam o exemplo dado na Figura 1. Grande parte desta e da próxima seção foi baseada no artigo de Tardos e Wexler (2007).

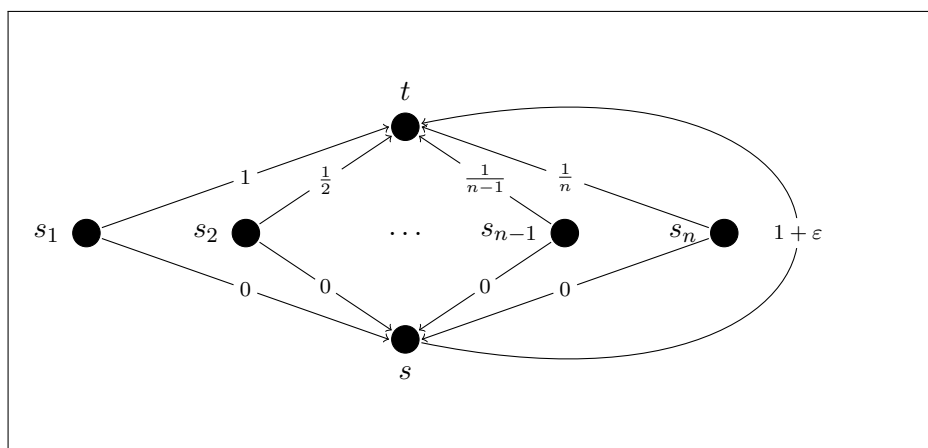
Seja  $G = (V, E)$  um dígrafo com custo não-negativo  $w_e$  para todo arco  $e \in E$ . Formalmente, temos que um jogo de conexão global é uma tupla  $(N, \mathcal{P}, c)$  em que  $N = \{1, \dots, n\}$  é um conjunto de  $n$  jogadores e, cada jogador  $i$ , possui um nó inicial  $s_i$  e um nó de destino  $t_i$ . O objetivo de cada jogador  $i$  é que seja construída uma rede em  $G$  (isto é, um subgrafo de  $G$ ) que conecte  $s_i$  a  $t_i$ , com o menor custo possível. Com isso, temos que o conjunto de estratégias  $P_i$  de um jogador  $i$  é conjunto de caminhos em  $G$  que conectam  $s_i$  a  $t_i$ , além de que  $\mathcal{P} = \times_{i=1}^n P_i$ . Seja  $\sigma \in \mathcal{P}$  um perfil de estratégias,  $\sigma = (P_1, \dots, P_n)$ , em que  $n_e$  representa o número de jogadores que utilizam o arco  $e$  em  $\sigma$ , definimos o custo do jogador  $i$  em  $\sigma$  como sendo  $c_i(\sigma) = \sum_{e \in P_i} \frac{w_e}{n_e}$ . Isto é, o custo de um arco  $e$  é dividido igualmente entre todos os jogadores que usam o arco e o custo dos jogadores é a soma das parcelas atribuídas a eles por cada arco utilizado no seu caminho.

Considere o exemplo de um jogo de formação de redes na Figura 2, em que os  $n$  jogadores desejam conectar o nó  $s$  ao nó  $t$ . Observe que se todos os jogadores utilizarem o arco de custo 1 para o transporte dos produtos, então este perfil de estratégias é um equilíbrio de Nash, sendo que cada jogador tem custo  $\frac{1}{n}$ . Por outro lado, se os  $n$  jogadores escolherem o arco de custo  $n$ , então também há um equilíbrio, sendo o custo de cada jogador igual a 1.

A seguir provaremos que todo jogo de conexão global admite pelo menos um equilíbrio de Nash. Porém, antes precisamos introduzir duas definições. A primeira delas diz respeito a *dinâmica de melhor resposta*, um processo de busca local a partir de um perfil de estratégias  $\sigma$  com respeito a melhorias individuais no custo dos jogadores. Ou seja, enquanto existir em  $\sigma$  um jogador  $i$  que consegue melhorar seu custo migrando da estratégia  $\sigma_i$  para  $\sigma'_i$ , faça o novo perfil de estratégias ser  $(\sigma'_i, \sigma_{-i})$  e repita o processo. Observe que se este processo de busca parar, então temos que  $\sigma$  é um equilíbrio de Nash.

Por exemplo, considere a instância do jogo mostrada na Figura 3, em que  $\varepsilon$  é um valor positivo, e seja  $\sigma = (s_1 s t, s_2 s t, \dots, s_n s t)$  o perfil em que cada jogador escolhe o caminho que passa pelo nó  $s$  para chegar ao seu destino final  $t$ . Vamos simular a dinâmica de melhor resposta

Figura 3: Exemplo de uma instância do jogo de conexão global, com  $t_i = t$  para todo jogador  $i$ .



Fonte: Elaborada pelos autores.

a partir de  $\sigma$  com o intuito de encontrar um equilíbrio. Em  $\sigma$ , o custo do jogador  $n$  vale  $c_n(\sigma) = (1 + \varepsilon)/n$ , de onde se conclui que ele prefere escolher o caminho  $s_n t$ , pois ele teria um custo de

$$c_n(\sigma) = \frac{1 + \varepsilon}{n} > \frac{1}{n} = c_n(s_n t, \sigma_{-n}).$$

Então, considere agora o perfil  $\sigma' = (s_n t, \sigma_{-n})$ . Seguindo o mesmo raciocínio anterior, o jogador  $n - 1$  prefere o caminho  $s_{n-1} t$ , uma vez que

$$c_{n-1}(\sigma') = \frac{1 + \varepsilon}{n - 1} > \frac{1}{n - 1} = c_{n-1}(s_{n-1} t, \sigma'_{-(n-1)}).$$

É possível verificar que essa dinâmica chegará ao perfil  $\sigma^* = (s_1 t, s_2 t, \dots, s_n t)$ , em que todos os jogadores escolheram respostas ótimas, isto é,  $\sigma^*$  é um equilíbrio e, assim, o processo finaliza.

A segunda definição é a de *jogos de potencial*, que são jogos que admitem uma função potencial. Assim, uma *função potencial exata* é uma função  $\Phi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que, para todo  $\sigma \in \mathcal{S}$  e todo jogador  $i \in N$ ,

$$\Phi(\sigma_i, \sigma_{-i}) - \Phi(\sigma'_i, \sigma_{-i}) = c_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) - c_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}),$$

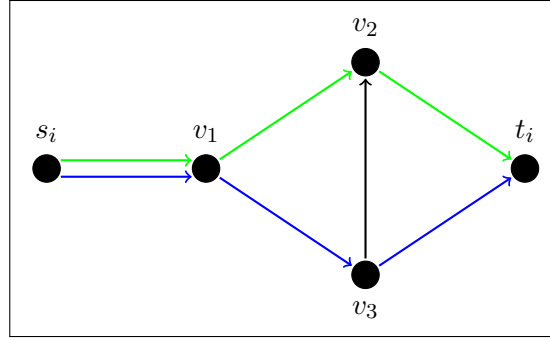
para todo  $\sigma'_i \in S_i$ . Ou seja, quando qualquer jogador  $i$  muda sua estratégia unilateralmente de  $\sigma_i$  para  $\sigma'_i$ , então a mudança em seu custo é igual a mudança ocorrida na função potencial.

Jogos de potencial possuem uma propriedade importante: nestes jogos sempre se consegue atingir um equilíbrio de Nash através da dinâmica de melhor resposta e, portanto, tais jogos sempre possuem equilíbrios de Nash, conforme o Teorema 1.

**Teorema 1.** A dinâmica de melhor resposta sempre converge em um equilíbrio de Nash em jogos de potencial.

*Demonstração.* Vamos considerar um perfil de estratégias  $\sigma$ . Se  $\sigma$  não é um equilíbrio, então existe um jogador  $i$  que consegue melhorar o seu custo mudando sua estratégia  $\sigma_i$  para uma outra estratégia  $\sigma'_i$ . Seja  $\Phi$  a função potencial associada ao jogo em questão. Uma vez que o jogador  $i$  diminuiu seu custo, temos que  $\Phi(\sigma_i, \sigma_{-i}) > \Phi(\sigma'_i, \sigma_{-i})$  e, portanto, a mudança feita pelo jogador  $i$  faz com que o potencial do novo perfil  $(\sigma'_i, \sigma_{-i})$  seja estritamente menor do que o anterior. Em cada iteração, o potencial diminui e, assim, um perfil de estratégias não é avaliado mais de uma vez. Consequentemente, uma vez que o número de perfis de estratégias do jogo é finito, a dinâmica de melhor resposta convergirá a um mínimo local da função potencial que é de fato um equilíbrio de Nash, já que nenhum jogador pode reduzir o seu custo a partir de tal perfil de estratégias (caso contrário, o perfil de estratégias não seria mínimo local).  $\square$

Figura 4: Exemplo de uma instância em que o jogador  $i$  passa a usar o caminho em verde ao invés do caminho em azul.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Agora apresentaremos uma função potencial associada ao jogo de conexão global. Dado um perfil de estratégias  $\sigma = (P_1, \dots, P_n)$ , definimos a função potencial  $\Phi(\sigma) = \sum_{e \in E} w_e H(n_e)$ , em que  $n_e$  é o número de caminhos em  $\sigma$  que usam o arco  $e$  e  $H(n) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$  é o  $n$ -ésimo número harmônico.

**Lema 1.** A função  $\Phi(\sigma) = \sum_{e \in E} w_e H(n_e)$  é uma função potencial exata para o jogo de conexão global.

*Demonstração.* Seja  $\sigma$  um perfil de estratégias e seja  $i$  um jogador que troca da estratégia (caminho)  $\sigma_i$  para  $\sigma'_i$ . Seja  $n_e$  o número de jogadores que utilizam o arco  $e$  no perfil de estratégias  $\sigma$  e seja  $n'_e$  o número de jogadores que utilizam o arco  $e$  no perfil de estratégias  $(\sigma'_i, \sigma_{-i})$ .

Na Figura 4 exemplificamos a mudança de estratégia realizada pelo jogador  $i$ , em que ele migra de  $\sigma_i$  (caminho em azul) para  $\sigma'_i$  (caminho em verde). Como a mudança foi feita unilateralmente por  $i$ , o número de jogadores utilizando os arcos que não estão presentes em  $\sigma_i$  e  $\sigma'_i$  (por exemplo, o arco preto  $v_2v_3$ ) não é alterado por essa troca de caminho e, assim, não influenciam no custo do jogador  $i$  e nem na função potencial. Além disso, arcos como  $s_i v_1$ , que são usados em ambos os caminhos  $\sigma$  e  $\sigma'$ , também não sofrem alteração no número de jogadores que o utilizam e, portanto, o termo referente a estes arcos mantém-se o mesmo tanto na soma dos custos do jogador quanto no cálculo da função potencial. Para os outros arcos do exemplo, note que em  $\sigma'_i$  o jogador  $i$  deixou de pagar  $w_{v_1v_3}/n_{v_1v_3} + w_{v_3t_i}/n_{v_3t_i}$  e passará a pagar  $w_{v_1v_2}/(n_{v_1v_2} + 1) + w_{v_2t_i}/(n_{v_2t_i} + 1)$  pelo uso dos arcos  $v_1v_2$  e  $v_2t_i$  em seu novo caminho, que é a mesma variação que ocorre na função potencial.

Generalizando, observe que  $n'_e = n_e + 1$ , para todo  $e \in \sigma'_i \setminus \sigma_i$ , já que  $i$  passou a usar o arco  $e$  ao mudar de caminho e que  $n'_e = n_e - 1$ , para todo  $e \in \sigma_i \setminus \sigma'_i$ , já que  $i$  deixou de usar o arco  $e$  ao mudar de caminho.

Note também que

$$\begin{aligned} \Phi(\sigma'_i, \sigma_{-i}) &= \sum_{e \notin \sigma_i \cup \sigma'_i} w_e H(n'_e) + \sum_{e \in \sigma_i \setminus \sigma'_i} w_e H(n'_e) + \sum_{e \in \sigma'_i \setminus \sigma_i} w_e H(n'_e) + \sum_{e \in \sigma_i \cap \sigma'_i} w_e H(n'_e) \\ &= \sum_{e \notin \sigma_i \cup \sigma'_i} w_e H(n_e) + \sum_{e \in \sigma_i \setminus \sigma'_i} w_e H(n_e - 1) + \sum_{e \in \sigma'_i \setminus \sigma_i} w_e H(n_e + 1) + \sum_{e \in \sigma_i \cap \sigma'_i} w_e H(n_e) \\ &= \sum_{e \notin \sigma_i \cup \sigma'_i} w_e H(n_e) + \sum_{e \in \sigma_i \setminus \sigma'_i} \left( w_e H(n_e) - \frac{w_e}{n_e} \right) + \sum_{e \in \sigma'_i \setminus \sigma_i} \left( w_e H(n_e) + \frac{w_e}{n_e + 1} \right) + \sum_{e \in \sigma_i \cap \sigma'_i} w_e H(n_e) \\ &= \Phi(\sigma) - \sum_{e \in \sigma_i \setminus \sigma'_i} \frac{w_e}{n_e} + \sum_{e \in \sigma'_i \setminus \sigma_i} \frac{w_e}{n_e + 1} \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\Phi(\sigma'_i, \sigma_{-i}) - \Phi(\sigma) = \sum_{e \in \sigma'_i \setminus \sigma_i} \frac{w_e}{n_e + 1} - \sum_{e \in \sigma_i \setminus \sigma'_i} \frac{w_e}{n_e}.$$

Analiseemos, então, a variação de custo  $c_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}) - c_i(\sigma)$  do jogador  $i$ . Se um arco  $e$  não pertence a  $\sigma_i \cup \sigma'_i$ , então ele não contribui para o custo do jogador  $i$ . Se um arco  $e$  pertence a  $\sigma_i \cap \sigma'_i$ , então não há variação de custo referente a  $e$  para o jogador  $i$ , já que ele utiliza  $e$  em ambos os caminhos e  $n_e = n'_e$ . Se um arco  $e$  pertence a  $\sigma_i \setminus \sigma'_i$ , então o custo referente a tal arco em  $\sigma_i$  é  $w_e/n_e$ , porém é zero para  $\sigma'_i$ . E, por fim, se um arco  $e$  pertence a  $\sigma'_i \setminus \sigma_i$  então o custo referente a tal arco em  $\sigma_i$  é zero, porém é  $w_e/n'_e = w_e/(n_e + 1)$  para  $\sigma'_i$ . Assim, concluímos que

$$c_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}) - c_i(\sigma) = \sum_{e \in \sigma'_i \setminus \sigma_i} \frac{w_e}{n_e + 1} - \sum_{e \in \sigma_i \setminus \sigma'_i} \frac{w_e}{n_e},$$

de onde o resultado segue. □

Pelo Lema 1, temos que o jogo de conexão global é de fato um jogo de potencial e, por conseguinte, temos o resultado no Corolário .

**Corolário 1.** A dinâmica de melhor resposta em jogos de conexão global converge para um equilíbrio de Nash.

Assim, sabemos que não apenas jogos de conexão global sempre admitem um equilíbrio de Nash, mas também que, se deixarmos os jogadores livres para mudarem para estratégias melhores, obteremos um equilíbrio (considerando que um jogador mude por vez). Mais do que isso, simular tal processo nos dá um algoritmo para encontrar um equilíbrio. Entretanto, apesar de sabermos que jogos de potencial convergem para um equilíbrio de Nash através da dinâmica de melhor resposta, o tempo de convergência dessa dinâmica pode ser exponencial. Por exemplo, Fabrikant et al. (2004) mostraram que encontrar um equilíbrio nos jogo de conexão global através da dinâmica de melhor resposta é PLS-completo.

**Outros jogos de potencial.** Uma interessante classe de jogos de potencial é a classe de *jogos de congestionamento* introduzida por Rosenthal (1973). Estes jogos são formados por uma tupla  $(N, \mathcal{S}, c)$ , em que  $N = \{1, \dots, n\}$  é o conjunto de  $n$  jogadores competindo pelo uso de  $m$  recursos dispostos em um conjunto  $M = \{1, \dots, m\}$ . O conjunto de estratégias  $S_i$  é qualquer subconjunto do conjunto potência de  $M$ , isto é, uma estratégia para o jogador  $i$  é um subconjunto de  $M$ . Ademais, temos que  $\mathcal{S} = \times_{i=1}^n S_i$ . Cada recurso  $j \in M$  possui um custo de congestionamento  $k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  associado com a quantidade de jogadores que o escolhem em suas respectivas estratégias. Seja  $\sigma$  um perfil de estratégias, o custo  $c_i(\sigma)$  de um jogador  $i$  é definido como  $c_i(\sigma) = \sum_{j \in \sigma_i} k_j(n_j)$ , em que  $n_j$  representa a quantidade de jogadores que escolheram o recurso  $j$ . Observe que o jogo de conexão global é, de fato, um jogo de congestionamento em que os recursos são os arcos da rede, os caminhos  $s_i t_i$  são as possíveis estratégias do jogador  $i$  e o custo de congestionamento dos arcos é  $k_e(n_e) = w_e/n_e$ .

Em seu trabalho, Rosenthal (1973) provou que todo jogo de congestionamento é um jogo de potencial. Posteriormente, Monderer e Shapley (1996) provaram que, para todo jogo de potencial, existe um jogo de congestionamento com a mesma função potencial, mostrando a forte relação entre jogos de potencial e jogos de congestionamento.

#### 4. Ineficiência de Equilíbrio

Encontrar uma solução de custo social ótimo de um jogo pode ser uma tarefa complicada. Muitas vezes recaímos em resolver um problema NP-difícil, o qual sabemos não poder ser resolvido em tempo polinomial a menos que  $P = NP$ . Algumas das abordagens utilizadas para lidar com esses tipos de problemas são algoritmos exatos, metaheurísticas (Glover e Kochenberger, 2003), algoritmos de aproximação (Pedrosa, 2017) e algoritmos parametrizados (Downey e Fellows, 2013; Souza et al., 2012).

Em particular, essa dificuldade surge também para os jogos de conexão global. Seja  $E_\sigma = \cup_i P_i$  o conjunto dos arcos utilizados na construção da rede dado pelos caminhos escolhidos



pelos jogadores  $i$  em  $\sigma = (P_1, \dots, P_n)$ . Definimos a função de custo social  $f$  como sendo o custo total dos arcos que estão em algum dos caminhos escolhidos pelos jogadores, isto é,  $f(\sigma) = \sum_{e \in E_\sigma} w_e$ . Observe que para o jogo de conexão global com a função  $f$ , encontrar uma solução de custo social ótimo é equivalente a resolver o problema da Floresta de Steiner<sup>4</sup>, que é um problema NP-difícil (Garey e Johnson, 1979). Apesar disso, utilizaremos em nossas análises subseqüentes uma solução ótima deste problema mesmo sem poder calculá-la em tempo polinomial (de forma semelhante ao que é feito em algoritmos de aproximação).

Vimos no exemplo mostrado na Figura 2 que a instância apresentada do jogo de conexão global possui dois equilíbrios, com custos sociais distintos. No equilíbrio  $\sigma^*$ , em que todos os jogadores utilizam o arco de custo 1, temos que  $f(\sigma^*) = 1$ , o que coincide com o valor do custo social ótimo. Enquanto que o outro equilíbrio  $\sigma$ , em que todos os jogadores utilizam o arco de custo  $n$ , vale que  $f(\sigma) = n$ . Portanto, uma vez que diferentes equilíbrios podem possuir diferentes custos sociais, ferramentas têm sido propostas para avaliar a ineficiência de equilíbrios.

Koutsoupas e Papadimitriou (1999) introduziram o termo Preço da Anarquia como sendo a maior razão entre o valor de um perfil de estratégias em equilíbrio e o valor de uma solução de custo social ótimo. Formalmente, seja  $f$  uma função de custo social de um jogo e seja PNE o conjunto de todos os equilíbrios deste jogo. Então, o Preço da Anarquia (PoA) é definido como

$$\text{PoA} = \frac{\max\{f(\sigma) : \sigma \in \text{PNE}\}}{\min\{f(\sigma^*) : \sigma^* \in \mathcal{S}\}}.$$

Informalmente, o PoA indica quanto o custo social é impactado pelo egoísmo dos jogadores. Por exemplo, quando o PoA possui valor muito distante de 1, isso significa que o comportamento egoísta dos jogadores pode provocar uma perturbação significativa no custo social. A seguir analisaremos o PoA dos jogos de conexão global, mostrando que o mesmo é igual ao número de jogadores.

**Teorema 2.** Para jogos de conexão global, vale que  $\text{PoA} \leq n$ . Ademais, existem jogos de conexão global onde  $\text{PoA} = n$ .

*Demonstração.* Sejam  $\sigma$  um equilíbrio e  $\sigma^*$  um perfil de estratégias de custo social mínimo. Observe que, como  $\sigma$  é um equilíbrio, temos que  $c_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}) \geq c_i(\sigma)$ , para todo  $1 \leq i \leq n$ . Ademais, note que  $\sum_{e \in \sigma_i^*} w_e \geq c_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i})$ , já que todo arco de  $\sigma_i^*$  é utilizado por pelo menos um jogador em  $(\sigma_i^*, \sigma_{-i})$ . Assim, concluímos que

$$f(\sigma^*) \geq \sum_{e \in \sigma_i^*} w_e \geq c_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}) \geq c_i(\sigma).$$

Basta então observar que  $f(\sigma) = \sum_{i \in N} c_i(\sigma) \leq n f(\sigma^*)$ .

Por fim, basta verificar que a instância da Figura 2 apresenta  $\text{PoA} = n$ . □

Outra relevante medida de ineficiência de equilíbrios é o Preço da Estabilidade (PoS). Este termo foi proposto por Anshelevich et al. (2008) e, ao contrário do PoA, ele avalia a razão entre o valor do melhor equilíbrio e o valor de uma solução de custo social ótimo. Como consequência, temos que  $\text{PoA} \geq \text{PoS} \geq 1$ . Formalmente, seja  $f$  uma função de custo social de um jogo e seja PNE o conjunto de todos os equilíbrios deste jogo. Então, o Preço da Estabilidade (PoS) é definido como

$$\text{PoS} = \frac{\min\{f(\sigma) : \sigma \in \text{PNE}\}}{\min\{f(\sigma^*) : \sigma^* \in \mathcal{S}\}}.$$

<sup>4</sup>No problema da Floresta de Steiner, dado um grafo direcionado  $G = (V, E)$  com pesos  $w_e$  nos arcos, um inteiro positivo  $k$  e  $k$  pares  $(s_i, t_i)$  de nós com  $1 \leq i \leq k$ , desejamos encontrar um subgrafo  $H$  de peso mínimo de forma que  $H$  contenha um caminho de  $s_i$  para  $t_i$  para todo  $1 \leq i \leq k$ .

O PoS permite analisar o menor impacto que o comportamento egoísta dos jogadores pode causar no sistema. Em alguns jogos, podem existir equilíbrios que são ótimos para a sociedade. Porém, em outros jogos, como veremos a seguir, o PoS pode ser grande, indicando que os equilíbrios estão longe do ótimo para a sociedade.

Uma vez que jogos de conexão global são jogos de potencial, podemos obter limitantes superiores no valor do PoS através do Teorema 3.

**Teorema 3.** Considere um jogo de potencial com função potencial exata  $\Phi$ . Se existem números  $A$  e  $B$  tais que

$$\frac{f(\sigma)}{A} \leq \Phi(\sigma) \leq Bf(\sigma),$$

para todo perfil de estratégias  $\sigma$ , então  $\text{PoS} \leq AB$ .

*Demonstração.* Seja  $\sigma$  um perfil de estratégias que minimiza a função potencial  $\Phi$  deste jogo e  $\sigma^*$  um perfil de estratégias de custo social mínimo. Temos que  $\Phi(\sigma) \leq \Phi(\sigma^*)$  e, por hipótese, temos que  $\frac{f(\sigma)}{A} \leq \Phi(\sigma)$ . Ademais, de acordo com a hipótese, temos que  $\Phi(\sigma^*) \leq Bf(\sigma^*)$ . Combinando essas duas desigualdades temos que  $f(\sigma) \leq ABf(\sigma^*)$ , de onde concluímos que  $\text{PoS} \leq AB$ .  $\square$

No Lema 2 é possível mostrar que a função de potencial  $\Phi(\sigma)$  definida para o jogo de conexão de global é limitada em função de  $f(\sigma)$ .

**Lema 2.** Seja  $\sigma$  um perfil de estratégias, então  $f(\sigma) \leq \Phi(\sigma) \leq H(n)f(\sigma)$ .

*Demonstração.* Seja  $\sigma$  um perfil de estratégias e denote por  $n_e$  o número de jogadores que utilizam o arco  $e$  em  $\sigma$ . Como  $H(n_e) \geq 1$ , se o arco  $e$  pertence a  $\sigma$ , e  $H(n_e) = 0$ , caso contrário, temos que

$$f(\sigma) = \sum_{e \in E_\sigma} c_e \leq \sum_{e \in E_\sigma} c_e H(n_e) = \sum_{e \in E} c_e H(n_e) = \Phi(\sigma).$$

Além disso, como cada arco  $e$  só pode ser usado por no máximo  $n$  jogadores, temos que  $H(n_e) \leq H(n)$  e concluímos que

$$\Phi(\sigma) = \sum_{e \in E} c_e H(n_e) = \sum_{e \in E_\sigma} c_e H(n_e) \leq \sum_{e \in E_\sigma} c_e H(n) = H(n)f(\sigma).$$

$\square$

Agora estamos aptos a mostrar que o PoS do jogo de conexão global vale exatamente  $H(n)$ , em que  $n$  é o número de jogadores.

**Teorema 4.** Para jogos de conexão global, vale que  $\text{PoS} \leq H(n)$ . Ademais, existem jogos de conexão global onde  $\text{PoS} = H(n)$ .

*Demonstração.* Como corolário do Lema 2 e do resultado do Teorema 3, segue que, para jogos de conexão global, o PoS é no máximo  $H(n)$ .

Para mostrar que existe um jogo onde  $\text{PoS} = H(n)$ , considere a instância do jogo na Figura 3, com  $t_i = t$  para cada jogador  $i$ . Observe que neste exemplo, no perfil social ótimo  $\sigma^*$ , todos os jogadores se conectam a  $t$  através do nó  $s$ , resultando em  $f(\sigma^*) = 1 + \varepsilon$ . Contudo, vimos anteriormente que  $\sigma^*$  não é um equilíbrio e, de fato, o único equilíbrio admitido nessa instância é o perfil  $\sigma = (s_1 t, s_2 t, \dots, s_n t)$ . Assim, temos que  $f(\sigma) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = H(n)$  e como  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\sigma)}{f(\sigma^*)} = H(n)$ , o resultado segue.  $\square$

Tabela 2: Resumos dos resultados encontrados na literatura acerca da ineficiência de equilíbrios dos jogos de conexão global.

Rede	Protocolo	PoA		PoS	
		LI	LS	LI	LS
ND-UD	Shapley	$n$	$n$	1	$H(n/2) + o(1)$
	Ordenado	$O(\log k)$	$\Omega(\log k)$	1	$H(n/2) + o(1)$
	Prim	$2n/(n+1)$	2	1	$H(n/2) + o(1)$
ND-MD	Shapley	$n$	$n$	1	$O(\log n/(\log \log n))$
	Ordenado	$O(\log^2 k)$	$\Omega(\log k)$	1	$O(\log n/(\log \log n))$
	Prim	$O(\log^2 k)$	$\Omega(\log k)$	1	$O(\log n/(\log \log n))$
D-UD	Shapley	$n$	$n$	$H(n)$	$H(n)$
	Ordenado	$n$	$n$	$H(n)$	$H(n)$
	Prim	$n$	$n$	1	$H(n)$
D-MD	Shapley	$n$	$n$	$H(n)$	$H(n)$
	Ordenado	$n$	$n$	$3/2$	$H(n)$
	Prim	$n$	$n$	$3/2$	$H(n)$

Fonte: Elaborada pelos autores.

Até agora consideramos instâncias do jogo de conexão global em que a rede de conexão é representado por um dígrafo e a regra de divisão dos custos dos arcos entre os jogadores é feita de forma proporcional, também chamado de protocolo de Shapley (Anshelevich et al., 2008). Chen et al. (2010) analisaram diferentes versões desse jogo, como por exemplo, quando a rede do jogo é representado por um grafo não-direcionado e versões em que  $t_i = t$  para cada jogador  $i$ . Como tentativa de encontrar melhores limitantes para o PoA e PoS, os autores também apresentaram diferentes protocolos de divisão dos custos dos arcos entre os jogadores.

O primeiro protocolo proposto, chamado de *protocolo ordenado*, atribui o custo integral do arco ao jogador de menor índice dentre aqueles que o usam em seus caminhos. O outro protocolo proposto, chamado de *protocolo de Prim* diferencia-se do protocolo ordenado somente em jogos em que  $t_i = t$ , para cada jogador  $i$ . Nesse caso, o protocolo funciona de maneira similar ao protocolo ordenado, porém ao invés de utilizar a ordem dada dos jogadores, a ordem é estabelecida através da execução do algoritmo de Prim para o problema da árvore geradora mínima. Isto é, o algoritmo de Prim é executado a partir do nó  $t$  e a ordem dos jogadores é estabelecida de acordo com a ordem na qual eles passam a fazer parte da árvore após a execução desse algoritmo.

A Tabela 2 resume os resultados encontrados na literatura para os limitantes inferiores (LI) e superiores (LS), tanto para o PoA quanto para o PoS, dos jogos de conexão global na suas mais diversas versões. As redes consideradas podem ser representadas por grafos não-direcionados (ND) ou direcionados (D), nas versões de um único destino (UD) ou múltiplos destinos (MD). Para o protocolo de Shapley, os resultados para o PoA em ambas as redes, ND e D, e os resultados para o PoS das redes D foram provados por Tardos e Wexler (2007). Para esse mesmo protocolo, o resultado para o PoS das redes ND-UD e ND-MD foram provados por Mamageishvili et al. (2014) e Li (2009), respectivamente. Todos os outros resultados foram demonstrados por Chen et al. (2010).

## 5. Conclusão

Nesta breve introdução à Teoria dos Jogos, exibimos alguns dos principais conceitos e terminologias da área e, para exemplificarmos os seus usos, apresentamos alguns jogos clássicos de formação de redes.

Vale notar que, apesar de interessante, equilíbrios de Nash não necessariamente representam o que de fato acontecerá na prática. Em primeiro lugar, existem jogos que não admitem equilíbrios de Nash, assim tal conceito não nos permite analisar tais jogos. Em segundo lugar, existem jogos com múltiplos equilíbrios, de forma que não podemos prever qual equilíbrio será obtido. Ademais, há jogos com equilíbrios de Nash, mas há a garantia que uma dinâmica de melhor resposta convergirá para algum destes equilíbrios. Há ainda resultados negativos em relação a complexidade computacional de se encontrar um equilíbrio de Nash (veja Nisan et al. (2007)). De qualquer forma, a análise da existência de um equilíbrio de Nash e dos valores de Preço da Anarquia e de Estabilidade pode trazer um conhecimento maior do jogo em questão, explicando, por exemplo, determinados comportamentos observados na prática. Além disso, existem generalizações do conceito do equilíbrio de Nash que podem ser analisadas, como o equilíbrio misto e o equilíbrio correlato, que podem dar mais informações sobre o jogo considerado.

Note também que no escopo deste texto consideramos somente jogos simultâneos, mas existem outros tipos de jogos, sendo preciso refinar a definição de equilíbrio. Por exemplo, em jogos sequenciais, em que as estratégias são escolhidas alternadamente entre os jogadores, a análise da estabilidade dos perfis de estratégias é feita pelo equilíbrio perfeito de subjogo. Referimos os leitores para o livro-texto de Nisan et al. (2007), em que são mostrados outros tipos de jogos e os diferentes conceitos de equilíbrio.

Por fim, existem muitos outros assuntos abordados pela Teoria dos Jogos (como leilões, por exemplo) que podem ser interessantes para o pesquisador da área de Pesquisa Operacional. Assim, referimos o leitor interessado em aprofundar o entendimento dos conceitos aqui apresentados e de outros conceitos da Teoria dos Jogos para os livros-textos de Schouery et al. (2015), Shoham e Leyton-Brown (2008) e Nisan et al. (2007).

**Agradecimentos.** Este trabalho foi parcialmente financiado pelo processo nº 2015/11937-9, da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) e pelos processos nº 425340/2016-3 e 308689/2017-8, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq). O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

## Referências

- Anshelevich, E., Dasgupta, A., Kleinberg, J., Tardos, E., Wexler, T., e Roughgarden, T. The price of stability for network design with fair cost allocation. *SIAM Journal on Computing*, v. 38, n. 4, p. 1602–1623, 2008.
- Chen, H.-L., Roughgarden, T., e Valiant, G. Designing network protocols for good equilibria. *SIAM Journal on Computing*, v. 39, n. 5, p. 1799–1832, 2010.
- Downey, R. G. e Fellows, M. R. *Fundamentals of Parameterized Complexity*. London: Springer London, 2013.
- Fabrikant, A., Papadimitriou, C., e Talwar, K. The complexity of pure Nash equilibria. In: *Proceedings of the 16th Annual ACM Symposium on Theory of computing - STOC '04*. Chicago, 2004. p. 604–612.
- Garey, M. R. e Johnson, D. S. *Computers and intractability: a guide to the theory of NP-completeness*. New York: Freeman, 1979.

- Glover, F. W. e Kochenberger, G. A. *Handbook of Metaheuristics*. New York: Kluwer Academic Publishers, 2003.
- Koutsoupias, E. e Papadimitriou, C. H. Worst-case equilibria. In: *Proceedings of the 16th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science - STACS 1999*. Berlin, 1999. p. 404–413.
- Li, J. An upper bound on the price of stability for undirected shapley network design games. *Information Processing Letters*, v. 109, n. 15, p. 876–878, 2009.
- Mamagishvili, A., Mihalák, M., e Montemezzani, S. An  $H_{n/2}$  upper bound on the price of stability of undirected network design games. In: *Proceedings of the 39th International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science - MFCS 2014*. Springer, 2014. p. 541–552.
- Monderer, D. e Shapley, L. S. Potential games. *Games and Economic Behavior*, v. 14, n. 1, p. 124–143, 1996.
- Morgenstern, O. e Von Neumann, J. *Theory of Games and Economic Behavior*. New Jersey: Princeton University Press, 1953.
- Nash, J. F. Equilibrium points in n-person games. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, v. 36, n. 1, p. 48–49, 1950.
- Nash, J. Non-cooperative games. *Annals of Mathematics*, v. 54, n. 2, p. 286, 1951.
- Nisan, N., Roughgarden, T., Tardos, E., e Vazirani, V. V. *Algorithmic Game Theory*. New York: Cambridge University Press, 2007.
- Nisan, N. e Ronen, A. Algorithmic mechanism design. *Games and Economic Behavior*, v. 35, n. 1-2, p. 166–196, 2001.
- Nobelprize.org. *All prizes in economic sciences*. 2018. Disponível em: [http://www.nobelprize.org/nobel\\_prizes/economic-sciences/laureates/index.html](http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/economic-sciences/laureates/index.html). Acesso em: 06/11/2018.
- Pedrosa, L. L. C. Uma breve introdução a algoritmos de aproximação. *Pesquisa Operacional para o Desenvolvimento*, v. 9, n. 3, p. 109–118, 2017.
- Rosenthal, R. W. A class of games possessing pure-strategy Nash equilibria. *International Journal of Game Theory*, v. 2, n. 1, p. 65–67, 1973.
- Schouery, R. C. S., Lee, O., Miyazawa, F. K., e Xavier, E. C. Tópicos da Teoria dos Jogos em Computação. In: *Anais do 30º Colóquio Brasileiro de Matemática*. Rio de Janeiro. Editora do IMPA, 2015.
- Shoham, Y. e Leyton-Brown, K. *Multiagent Systems: Algorithmic, game-theoretic, and logical foundations*. New York: Cambridge University Press, 2008.
- Souza, U. S., Protti, F., e Silva, M. D. Complexidade parametrizada para problemas em grafos E/Ou. *Pesquisa Operacional para o Desenvolvimento*, v. 4, n. 2, p. 160–174, 2012.
- Tardos, E. e Wexler, T. Network formation games and the potential function method. In: Nisan, N., Roughgarden, T., Tardos, E., e Vazirani, V. V. (ee.), *Algorithmic Game Theory*, cap. 19, p. 487–516. New York: Cambridge University Press, 2007.