

## **OTIMIZAÇÃO ESTOCÁSTICA COM MÚLTIPLOS OBJETIVOS E SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO NO DESENVOLVIMENTO DE ESTRATÉGIAS DE VENDAS**

Aneirson Francisco da Silva<sup>a\*</sup>, Maria de Fátima Ferreira da Silva<sup>b</sup>,  
Fernando Augusto Silva Marins<sup>a</sup>

<sup>a</sup>*Universidade Estadual Paulista (UNESP-FEG), Guaratinguetá – SP, Brasil*

<sup>b</sup>*Fundação de Ensino e Pesquisa de Itajubá (FEPI), Itajubá – SP, Brasil*

### **Resumo**

As micros, pequenas e médias empresas são importantes no cenário macroeconômico do Brasil. Desta forma, é interessante a adoção de métodos científicos no auxílio à solução de seus problemas visando ao seu fortalecimento. A Otimização Estocástica com Múltiplos Objetivos (OEMO) e a Simulação de Monte Carlo (SMC) são ferramentas robustas para auxiliar na tomada de decisões gerenciais. Neste trabalho a OEMO e a SMC são utilizadas para desenvolver estratégias e políticas de vendas para uma empresa do mercado varejista de vestuário. Uma aplicação real gerou resultados interessantes, uma vez que possibilitou indicar políticas ótimas de vendas para vários cenários, e melhorando a competitividade e lucratividade da empresa.

Palavras-chave: Tomada de Decisões Gerenciais, Simulação de Monte Carlo, Otimização Estocástica Multiobjetivo, Micro, Média e Pequena Empresas.

### **Abstract**

The micro, small and medium companies are important in the macroeconomic scenario in Brazil. Thus, it is interesting the adoption of scientific methods to treat its management problems, and so contributing to its strengthening and survival. In this context, the Stochastic Multiobjective Optimization and the Monte Carlo Simulation are robust tools to help the manager to make decisions. In this paper, these tools are utilized to develop optimal policies for a clothing company of the retail market. A real application presents interesting results, identifying optimal policies for sales planning for several scenarios, and improving the competitiveness and the profitability of the studied company.

Keywords: Managerial Decision Making, Monte Carlo Simulation, Stochastic Multiobjective Optimization, Micro, Small and Medium Companies.

\*Autor para correspondência: e-mail: [aneirson@feg.unesp.br](mailto:aneirson@feg.unesp.br)

## PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

### 1. Introdução

As discussões acerca da relevância das micros, pequenas e médias empresas (MPEs) e a sua relação com o desenvolvimento econômico e social ganhou notável espaço entre os diversos segmentos da sociedade, a partir de meados dos anos 90, evidenciando sua importância no que diz respeito à geração de emprego e renda no Brasil (SEBRAE, 2007).

As MPEs são fundamentais para estimular a economia do país, possibilitando a inclusão social, mediante a maior oferta de postos de trabalho. A definição de pequena empresa mais difundida é a da Lei Geral para Micro e Pequenas Empresas. A Figura 1 contempla a classificação das empresas em cada ramo de atividade, em função do número de funcionários e do faturamento anual.

Desde a década de 90, grandes corporações têm-se instalado no Brasil, acompanhando uma tendência mundial, e incentivaram o processo de terceirização de áreas que não são consideradas essenciais para garantir a lucratividade e competitividade dessas empresas. Além disso, mesmo empresas de menor porte vêm contratando as MPEs, para cuidarem daquilo que elas consideram não ser o seu *core business*. O Estatuto das MPEs do Brasil, de 1998, veio a facilitar essa política empresarial.

INSTITUIÇÃO	CRITÉRIO DE CLASSIFICAÇÃO DE EMPRESAS											
	INDÚSTRIA				COMÉRCIO				SERVIÇOS			
	MICRO	PEQUENA	MÉDIA	GRANDE	MICRO	PEQUENA	MÉDIA	GRANDE	MICRO	PEQUENA	MÉDIA	GRANDE
<b>PORTE DAS EMPRESAS SEGUNDO O NÚMERO DE FUNCIONÁRIOS</b>												
SEBRAE <sup>(1)</sup>	até 19	20 a 99	100 a 499	mais 499	até 9	10 a 49	50 a 99	mais 99	até 9	10 a 49	50 a 99	mais 99
FUNCEX <sup>(2)</sup>	1 a 19	20 a 99	100 a 499	500 -mais	-	-	-	-	-	-	-	-
<b>PORTE DAS EMPRESAS SEGUNDO RECEITA OPERACIONAL BRUTA ANUAL (EM R\$)</b>												
BNDES <sup>(3)</sup>	até 1.200 mil	1.200 mil a 10.500 mil	10.500 mil a 60 milhões	acima de 60 milhões	até 1.200 mil	1.200 mil a 10.500 mil	10.500 mil a 60 milhões	acima de 60 milhões	até 1.200 mil	1.200 mil a 10.500 mil	10.500 mil a 60 milhões	acima de 60 milhões
BDMG <sup>(4)</sup>	até 1.200 mil	1.200 mil a 10.500 mil	10.500 mil a 60 milhões	acima de 60 milhões	até 1.200 mil	1.200 mil a 10.500 mil	10.500 mil a 60 milhões	acima de 60 milhões	até 1.200 mil	1.200 mil a 10.500 mil	10.500 mil a 60 milhões	acima de 60 milhões
<b>PORTE DAS EMPRESAS SEGUNDO FATURAMENTO BRUTO ANUAL (EM R\$)</b>												
BANCO DO BRASIL <sup>(5)</sup>	até 5 milhões	até 5 milhões	entre 5 e 100 milhões	entre 5 e 100 milhões	até 5 milhões	até 5 milhões	entre 5 e 100 milhões	entre 5 e 100 milhões	até 5 milhões	até 5 milhões	entre 5 e 100 milhões	entre 5 e 100 milhões
SIMPLES <sup>(6)</sup>	120.000	1.200.000	-	-	120.000	1.200.000	-	-	120.000	1.200.000	-	-

FONTE: SEBRAE-MG.

ELABORAÇÃO: BANCO DE DADOS DA CBIC.

Figura 1. Classificação das empresas. SEBRAE (2007).

## PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

Neste contexto, a taxa de desemprego foi alta nos últimos 10 anos e contribuiu para que surgissem mais MPEs, destacando-se que em novembro/2012 caiu para 5,2% da população economicamente ativa, que é o menor nível nos últimos nove anos. Apesar do sonho do seu próprio negócio ser um dos discursos mais comuns entre assalariados brasileiros, ser empreendedor (seja micro ou pequeno) é uma atividade que ainda tem vários percalços no caminho.

Um dos principais problemas das MPEs brasileiras é a sua vida curta, pois, segundo levantamento do SEBRAE (2007), no início da década passada, metade destas empresas fecham as portas com menos de dois anos de existência. Ainda hoje a sobrevivência das MPEs brasileiras é motivo de preocupação.

O surgimento de novas empresas no Brasil é de cerca de 460 mil por ano, sendo a maioria, cerca de 80%, MPEs que atuam na área de serviços e no comércio. Entretanto, segundo pesquisa realizada pelo SEBRAE, 49,4% delas encerram as atividades com até dois anos de existência, 56,4% com até três anos e 59,9% não sobrevivem além dos quatro anos (SEBRAE, 2007). Foram identificados pela mesma entidade quais seriam as principais razões, segundo os próprios empresários, para tal. A falta de capital de giro foi apontada como o principal problema por 24,1% dos entrevistados, seguido dos impostos elevados (16%), falta de clientes (8%) e concorrência (7%).

As organizações empresariais, até mesmo as MPEs, estão inseridas em um contexto mundial de complexidade econômica e faz-se necessário que as decisões empresariais sejam tomadas de maneira mais científica. Tendo essa necessidade em vista a Simulação é uma boa estratégia para fundamentar as ações gerenciais de uma empresa (LAW E KELTON, 2000).

O objetivo geral deste trabalho foi desenvolver estratégias de vendas para uma MPE do setor de comércio varejista de vestuário por meio do uso de técnicas da Pesquisa Operacional. Como objetivos específicos buscou-se utilizar a Otimização Estocástica com

Múltiplos Objetivos - OEMO (ABDELAZIZ, 2012) e a Simulação de Monte Carlo - SMC (LAW E KELTON, 2000) para o desenvolvimento de estratégias e políticas de vendas.

Este artigo está organizado em seções. Na seção 2 estão os aspectos metodológicos e a descrição do problema, a seção 3 aborda a Otimização Estocástica e a Simulação de Monte Carlo. A seção 4 apresenta o modelo proposto e a seção 5 mostra a análise dos resultados, seguida pelos comentários finais que estão na seção 6. Finalmente estão as referências bibliográficas utilizadas.

### **2. Material e Métodos**

De acordo com Bertrand e Fransoo (2002) e Miguel *et al.* (2010), este trabalho pode ser classificado como sendo uma pesquisa aplicada, com objetivos empíricos descritivos, pois o modelo desenvolvido descreve as relações causais que podem existir na realidade, favorecendo a compreensão de processos reais. A forma de abordar o problema é quantitativa, sendo o método de pesquisa a modelagem e simulação.

A Figura 2 mostra os passos desta pesquisa que estão descritos na sequência:

1. Identificação do problema – discutiu-se com a proprietária de uma micro empresa do setor de vestuário quais seriam os parâmetros e variáveis que deveriam compor o modelo, com o intuito de aumentar a aderência à realidade da empresa. As características do problema estão adiante;
2. Coleta de dados – Utilizaram-se os relatórios contábeis mensais da empresa;
3. Modelagem – Foi desenvolvido um modelo estocástico com múltiplos objetivos e foi utilizada a Simulação de Monte Carlo no desenvolvimento de estratégias de vendas para a empresa estudada, conforme descrito na seção 4;

4. Experimento – utilizou-se o *software Crystal Ball™* e o *GAMS™* para obtenção das estratégias de vendas mensais correspondentes ao ano de 2011 (12 meses). Alguns dos resultados estão na seção 5;
5. Validação dos resultados – foi feita com o apoio dos gestores da empresa com a comparação dos resultados do modelo e os resultados reais da empresa no ano de 2011.

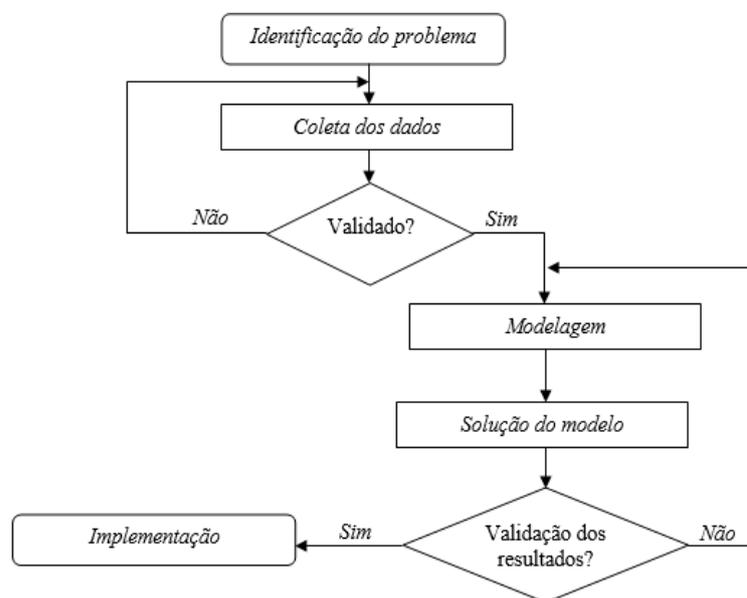


Figura 2. Etapas da pesquisa. Fonte: Silva, Marins e Montevechi (2013).

### 3. Descrição do Problema

A empresa, que foi o objeto do estudo, tem um quadro pequeno de funcionários, conta com duas atendentes treinadas para garantir a satisfação dos clientes e que também ajudam na manutenção da limpeza. A proprietária é encarregada pela parte das finanças e eventualmente ajuda no atendimento. As mercadorias oferecidas são criteriosamente escolhidas e pertencem a marcas conhecidas e pela alta qualidade a fim de atender um público alvo formado em sua maioria por mulheres jovens de classe média alta. A empresa está cadastrada na Receita Federal como Empresa de Pequeno Porte Simples Nacional, uma vez que sua receita bruta é de até R\$ 360.000,00.

Os objetivos a serem incluídos no modelo foram definidos em conjunto com a proprietária da empresa, via análise econômico-financeira e também por análise mercadológica, ficando definido que eles seriam:

- Maximizar lucro global;
- Maximizar as vendas à vista;
- Minimizar as vendas na forma de pagamento em crediário.

A empresa possui despesas variáveis (estocásticas) e despesas fixas como: aluguel; despesas com contador; funcionários; IPTU e seguro.

#### 4. Otimização Estocástica com Múltiplos Objetivos e Simulação de Monte Carlo

Em um problema em que há vários objetivos considerados simultaneamente, sendo que alguns podem ser conflitantes entre si, o decisor escolherá as soluções que proporcionem equilíbrio entre estes conflitos e atendam os interesses da empresa.

Em muitos problemas práticos do contexto industrial e empresarial, o decisor deve otimizar estes objetivos conflitantes, levando em consideração a incerteza nos coeficientes das funções objetivos e das restrições. Em geral, os coeficientes das funções objetivos podem ser estocásticos, os coeficientes da matriz tecnológica (*Left Hand Side* - LHS) e as limitações (*Right Hand Side* - RHS) também podem ser estocásticos. Nestas situações a OEMO é de extrema utilidade.

Conforme Abdelaziz (2012), a formulação geral do Modelo Estocástico com Múltiplos Objetivos (MEM) pode ser expressa por:

$$\text{Maximizar } f(\omega, x) = (f_1(\omega, x), \dots, f_m(\omega, x)) \quad (1)$$

S. a:

$$x \in X(\omega) = \{g_j(\omega, x) \leq b_j(\omega), \quad j = 1, \dots, K\} \quad (2)$$

$$x \in D, \omega \in \Omega, \quad (3)$$

sendo  $D$  um conjunto convexo determinístico, o conjunto viável  $X(\omega)$  é aleatório, as restrições  $g_j$  e os parâmetros  $b_j$  são aleatórios, os  $m$  objetivos  $(f_1(\omega, x), \dots, f_m(\omega, x))$  são aleatórios,  $x = (x_1, \dots, x_n)$  é um vetor  $n$ -dimensional e  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  é um espaço de probabilidade.

Shahinidis (2004) comenta que a otimização estocástica é aplicada em diversas áreas do conhecimento, como, por exemplo, no planejamento da produção, gestão de recursos naturais e em finanças.

Um das vantagens de se utilizar os MEM é a possibilidade de extrair um conjunto de informações relevantes relacionadas ao problema em questão, e desta forma, possibilitar a análise de diferentes cenários (ABDELAZIZ; AOUNI E EL FAYEDH, 2007; AOUNI; ABDELAZIZ E MARTEL, 2005; DEB, 2001).

Outra formulação para representar um MEM, proposta por Abdelaziz, Aouni e El Fayedh (2007), é:

$$\text{Max } \sum_{j=1}^n \tilde{C}_{ij} x_j \quad \forall i = 1, 2, \dots, m \quad (4)$$

S. a:

$$\sum_{j=1}^n \tilde{A}_{ij} x_j \leq \tilde{b}_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, m \quad (5)$$

$$x \in X, X \text{ é o conjunto de soluções viáveis} \quad (6)$$

sendo  $\tilde{C}_{ij}$ ,  $\tilde{A}_{ij}$  matrizes aleatórias e  $\tilde{b}_i$  um recurso aleatório estocástico.

Na *Goal Programming* (GP) ou Programação por Metas as múltiplas funções objetivos originais são transformadas em metas (ou restrições flexíveis) e considera-se uma nova função objetivo associada à minimização de desvios (acima ou abaixo) dos objetivos com relação às metas estabelecidas (IGNIZIO, 1985, ABDELAZIZ; AOUNI E EL FAYEDH, 2007; AOUNI; ABDELAZIZ E MARTEL, 2005; DEB, 2001).

Um modelo de GP bastante utilizado é conhecido por *Weighted Goal Programming* (WGP) ou Programação por Metas Ponderada (IGNIZIO, 1985):

$$\text{Min } \sum_{i=1}^n (\alpha_i d_i^+ + \beta_i d_i^-) \quad (7)$$

S. a:

$$f_i(X) + d_i^- - d_i^+ = g_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

$$d_i^+, d_i^- \geq 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (9)$$

$$X \in F, F \text{ é o conjunto de soluções viáveis} \quad (10)$$

sendo  $f_i(X)$  as múltiplas funções objetivos originais,  $g_i$  as metas (valores alvos) estabelecidas para estes objetivos,  $d_i^-$  e  $d_i^+$  as variáveis de desvios que, respectivamente, representam valores abaixo e acima das metas,  $\alpha_i$  e  $\beta_i$  os pesos associados às variáveis de desvios e  $F$  um conjunto viável.

A primeira formulação de modelos da *Stochastic Goal Programming* (SGP) ou Programação por Metas Estocástica foi proposta por Contini (1968) e é similar ao WGP com as adaptações relativas às variáveis aleatórias envolvidas. Este autor considerou as metas para os objetivos originais, como sendo variáveis aleatórias ( $g_i : \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$  com  $i = 1, \dots, p$ ) com distribuição de probabilidades normal (com momentos de primeira e segunda ordem finitos).

Contini (1968) formulou um modelo que trata da maximização da probabilidade que a decisão pertencerá a uma região que contenha a meta aleatória, ou seja, a solução é tão próxima quanto possível da meta aleatória.

Aouni e La Torre (2010) propuseram, inicialmente, um modelo de GP cujas soluções,  $x : \Omega \rightarrow \mathfrak{R}^n$ , são variáveis aleatórias que não são necessariamente Pareto ótimas para o SGP e hipóteses adicionais deveriam ser satisfeitas para tal. Como os autores comentam, isto representa uma questão de pesquisa em aberto que requer análises mais aprofundadas. Eles

desenvolveram, então, outro modelo de GP alternativo que permite se obter, no mínimo, soluções aproximadas para o SGP.

Para a apresentação deste modelo alternativo, suponha-se que foi obtida uma amostra de observações do conjunto aleatório  $(f(x, \omega), g(\omega), D(\omega))$  dada por  $(f(x, \omega_i), g(\omega_i), D(\omega_i)) \in \mathfrak{R}^p \times \mathfrak{R}^p \times \wp(\mathfrak{R}^n), i=1, \dots, m$ . O conjunto  $\wp(\mathfrak{R}^n)$  representa uma família de conjuntos compactos em  $\mathfrak{R}^n$  com a topologia gerada pela distância de Hausdorff (AOUNI e LA TORRE, 2010).

Considere-se, também, que as triplas  $(f(x, \omega_i), g(\omega_i), D(\omega_i))$  foram obtidas de um mesmo experimento. O modelo pode ser formulado como sendo:

$$\min \sum_{i=1}^p (d_i^+(\omega_k) + d_i^-(\omega_k)) \quad (11)$$

S. a:

$$f_i(x, \omega_k) + d_i^-(\omega_k) - d_i^+(\omega_k) = g_i(\omega_k) \quad , \quad \forall i = 1, \dots, p \quad (12)$$

$$x(\omega_k) \in D. \quad (13)$$

$$d_i^+(\omega_k), d_i^-(\omega_k) \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, p \quad (14)$$

De acordo com Aouni e La Torre (2010), os conjuntos  $\{x(\omega_1), \dots, x(\omega_m)\}, \{d_i^+(\omega_1), \dots, d_i^+(\omega_m)\}$  e  $\{d_i^-(\omega_1), \dots, d_i^-(\omega_m)\}$  são, respectivamente, amostras das variáveis aleatórias  $x, d_i^+$  e  $d_i^-$  e se as observações são independentes e identicamente distribuídas as amostras também o serão.

Na empresa analisada neste artigo, as variáveis são consideradas aleatórias e contínuas, pode-se obter uma estimação da média (será a melhor solução do modelo) e da variância da solução (aleatória)  $x$  e as estimações tornam-se melhores e mais acuradas quando se aumenta o número de observações.

O processo de solução (ver adiante) deste modelo alternativo requer mais tempo computacional do que se fosse adotado um modelo determinístico equivalente ao SGP, pois vários (podendo ser muitos, ver seção 5) experimentos (que geram as amostras dos valores das variáveis estocásticas) deverão ser realizados e os problemas associados resolvidos. Deve-se comentar que, como a solução para o SGP foi considerada uma variável aleatória, de acordo com o Teorema Central do Limite (*Central Limit Theorem*), quanto maior for o tamanho da amostra mais precisa será a estimação dos momentos estatísticos da solução do SGP.

Para gerar as amostras independentes e identicamente distribuídas para a solução do modelo alternativo, na empresa estudada, a técnica que foi utilizada foi a SMC.

A SMC é bastante útil, pois possibilita a análise prévia de situações que a empresa em estudo poderia ter que enfrentar antes que elas aconteçam. De acordo com Parelman e Santin (2009), a SMC é um método bem conhecido, que visa contemplar às incertezas presentes em muitos problemas de decisão. A construção de modelos de simulação requer experiência tanto no uso de recursos computacionais quanto no campo empresarial onde se pretende usar esses resultados (LAW & KELTON, 2000).

O fundamento da SMC é gerar valores para as variáveis que compõem o modelo a ser estudado, por meio de números aleatórios. Existem muitas variáveis nos sistemas reais que são estocásticas por natureza, e que podem ser simuladas tais como: tempo das atividades de um projeto, número de empregados ausentes ao trabalho cada dia, volume de vendas, preço da matéria-prima, custo de produtos, viabilidade econômica, dentre outros.

## 5. Modelo de Otimização Estocástica com Múltiplos Objetivos

A seguir são mostrados os conjuntos, índices, parâmetros, variáveis auxiliares e variáveis de decisão do Modelo de Otimização Estocástica com Múltiplos Objetivos (MOEMO) adotado para ajudar a empresa estudada no desenvolvimento de suas estratégias de vendas.

### Índices

$i$	Tipos de vestuários, $I = \{\text{Vestidos, Jeans, Blusinhas, Sapatos, Outros}\}$ ;
$j$	Formas de pagamento no cartão, $J = \{\text{Dinheiro, Cartão, Crediário}\}$ ;
$j'$	Forma de pagamento em dinheiro;
$j''$	Forma de pagamento em crediário;
$t$	Períodos de planejamento, $T = \{1, 2, \dots, 12\}$ .

### Parâmetros

$\tilde{m}_{i j t}$	Preço de venda do vestuário $i$ na forma de pagamento $j$ no período $t$ ;
$\tilde{c}_{i j t}$	Custo de venda do vestuário $i$ na condição $j$ no período $t$ ;
$b_{i t}$	Vendas esperadas (na ocorrência de alta demanda) para o vestuário $i$ no período $t$ ;
$d_{i t}$	Vendas esperadas (na ocorrência de baixa demanda) para o vestuário $i$ no período $t$ ;

### Variáveis auxiliares

$\tilde{G}$	Despesa global ou soma das despesas fixas e variáveis;
$d_1^-$	Variável de desvio abaixo da meta de lucro;
$d_2^-$	Variável de desvio abaixo da meta de vendas à vista.
$d_3^+$	Variável de desvio acima da meta de vendas pela forma de pagamento crediário.
$\tilde{\omega}_1$	Peso estocástico associado a variável de desvio $d_1^-$ ;
$\tilde{\omega}_2$	Peso estocástico associado a variável de desvio $d_2^-$ ;
$\tilde{\omega}_3$	Peso estocástico associado a variável de desvio $d_3^+$ ;

A empresa é nova no mercado e, portanto, não havia uma amostra significativa para realizar o teste de aderência para identificar as distribuições de probabilidades referentes às variáveis aleatórias envolvidas. Nesta pesquisa, optou-se por utilizar a distribuição uniforme, visto que tal distribuição é bem comportada e pode inserir a aleatoriedade desejada de forma compatível à realidade da empresa (MONTGOMERY e RUNGER, 2009). Neste tipo de distribuição a variável aleatória é definida num intervalo e todos os seus valores possuem a mesma probabilidade de ocorrência.

## PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

Desta forma, foram coletadas todas as informações contábeis de vendas da loja num período de 12 meses e, assim, coletou-se os valores mínimos e máximos associada a cada produto em cada modalidade de pagamento. Considerou-se que os pesos,  $\omega$ , associados às variáveis de desvios poderiam variar de maneira uniforme no intervalo  $[0, 1]$ . A título de ilustração da aplicação do MOEMO, os dados de entrada do modelo com respeito às despesas variáveis para o mês 1 (janeiro de 2011) estão resumidos na Tabela 1, os intervalos em [R\$] foram definidos baseando-se no histórico contábil destas despesas. Adotou-se a notação  $U\sim[a, b]$  que significa que a variável aleatória segue uma distribuição de probabilidades uniforme no intervalo  $[a, b]$ .

Tabela 1. Distribuições de probabilidade das despesas variáveis.

<b>Despesas Variáveis</b>	<b>Distribuição</b>
Telefone	$U\sim [90,00, 220,00]$
Água	$U\sim [30,00, 50,00]$
Energia	$U\sim [90,00, 150,00]$
Internet	$U\sim [45,00, 85,00]$
Produtos de limpeza	$U\sim [40,00, 60,00]$
Despesa comercial	$U\sim [40,00, 80,00]$
Outras despesas	$U\sim [90,00, 180,00]$

Tabela 2. Distribuições de probabilidade dos preços de venda dos vestuários

<b>Preços de Venda</b>	<b>Distribuição</b>
Vestido (dinheiro)	$U\sim [170, 500]$
Vestido (cartão)	$U\sim [220, 600]$
Vestido (crediário)	$U\sim [240, 500]$
Blusinha (dinheiro)	$U\sim [30, 150]$
Blusinha (cartão)	$U\sim [40, 200]$
Blusinha (crediário)	$U\sim [50, 200]$
Jeans (dinheiro)	$U\sim [180, 300]$
Jeans (cartão)	$U\sim [220, 400]$
Jeans (crediário)	$U\sim [220, 400]$
Sapato (dinheiro)	$U\sim [120, 400]$
Sapato (cartão)	$U\sim [150, 450]$
Sapato (crediário)	$U\sim [180, 450]$
Outros (dinheiro)	$U\sim [5, 280]$
Outros (cartão)	$U\sim [20, 300]$
Outros (crediário)	$U\sim [30, 300]$

As variáveis relacionadas aos preços de venda para cada vestuário  $i$  no período  $t$ , também são estocásticas. A título de ilustração, a Tabela 2 contempla estas informações para o mês de janeiro de 2011, novamente os intervalos em [R\$] foram definidos baseando-se no histórico de vendas para cada vestuário  $i$  na forma de pagamento  $j$ .

**Variáveis de Decisão do MOEMO**

$x_{ijt}$  Quantidade a ser vendida do vestuário  $i$ , na forma de pagamento  $j$ , no período  $t$ ;

As equações de (15) a (17) expressam, respectivamente, as três funções objetivos de interesse da proprietária da loja, a maximização do lucro global, a maximização das vendas à vista e a minimização das vendas com pagamento em crediários:

$$Max Z = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{t \in T} (\tilde{M}_{ijt} - \tilde{C}_{ijt}) x_{ijt} - \tilde{G} \tag{15}$$

$$Max Z = \sum_{i \in I} \sum_{j' \in J} \sum_{t \in T} x_{ijt} \tag{16}$$

$$Min Z = \sum_{i \in I} \sum_{j'' \in J} \sum_{t \in T} x_{ijt} \tag{17}$$

Conforme já comentado, nos modelos de GP transforma-se cada objetivo em meta, por meio de variáveis de desvios acima ( $d^+$ ) ou abaixo ( $d^-$ ) da meta estabelecida para cada objetivo.

Quando a função objetivo original é de maximização (como é o caso do lucro global), o interesse do decisor pode ser traduzido na minimização do  $d^-$  associado à meta estabelecida e quando a função é de minimização (como é o caso das vendas com pagamento em crediários) o seu interesse é minimizar o  $d^+$ .

Na aplicação deste modelo os valores dos pesos ( $\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \tilde{w}_3$ ) dos desvios ( $d_1^-, d_2^-, d_3^+$ ) foram fixados pela proprietária da loja.

Desta maneira, no MOEMO desenvolvido para o problema de planejamento de vendas da loja, descrito a seguir, foi considerada uma nova função objetivo, dada por (18):

**Modelo Completo**

$$\text{Min } Z = \tilde{\omega}_1 d_1^- + \tilde{\omega}_2 d_2^- + \tilde{\omega}_3 d_3^+ \quad (18)$$

S. a:

$$d_{it} \leq \sum_{j' \in J} \sum_{j'' \in J} \sum_{j \in J} X_{ij't} \leq b_{it} \quad (19)$$

$$\forall i \in I, \forall t \in T$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{t \in T} x_{ij't} + d_1^- \geq 0 \quad (20)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{j'' \in J} \sum_{t \in T} x_{ij''t} - d_3^+ \leq 0 \quad (21)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{t \in T} (\tilde{M}_{ijt} - \tilde{C}_{ijt}) x_{ijt} - \tilde{G} + d_2^- \geq 0 \quad (22)$$

$$x_{ijt} \in I^+ \quad \forall i \in I, \forall j \in J, \forall t \in T \quad (23)$$

$$d_1^- \geq 0; d_2^- \geq 0; d_3^+ \geq 0 \quad (24)$$

A inequação (19) estabelece os intervalos onde podem oscilar as vendas de cada vestuário  $i$ , na forma de pagamento  $j$ , no período  $t$ . As inequações (20) e (21) transformam em metas as funções objetivos originais associadas às vendas na forma de pagamento à vista e às vendas na forma de pagamento em crediário. A inequação (22) transforma em meta a função objetivo original associada ao lucro global. Nas restrições (23) e (24) estão os domínios das variáveis.

## 6. Resultados do Modelo

O MOEMO apresentou 192 variáveis inteiras e 51 restrições estocásticas. Para a solução do modelo foi utilizado um computador com processador Intel (Core i7) 1,2 GHz até 2,266 GHz, com *max turbo frequency*, 4MB cache e 8GB de RAM DDR3 80MHZ e sistema operacional *Windows 7* profissional 64 bits.

Para o mês de janeiro, a título de ilustração, foram realizados 5.000 experimentos com 1.000 corridas de cada um deles, gerando um total 5 milhões de iterações. O tempo computacional foi de aproximadamente 7 minutos e os resultados das projeções de vendas estão na Tabela 3. Na Tabela 3 tem-se a política de venda (melhores estratégias de venda) para o mês de janeiro. Por se tratar de modelos estocásticos não lineares, não se pode afirmar que essa solução é a ótima, contudo, a metaheurística utilizada possibilitou boas soluções que foram consideradas interessantes pela proprietária da loja.

Tabela 3. Resultados da otimização para janeiro/2011.

<b>Vestuário e forma de pagamento</b>	<b>Quantidade vendida</b>
Blusinhas com cartão	9
Blusinhas com crediário	5
Blusinhas com dinheiro	6
Jeans com cartão	3
Jeans com crediário	4
Jeans com dinheiro	4
Outros com cartão	10
Outros com crediários	4
Outros com dinheiro	15
Sapatos com cartão	5
Sapatos com crediário	5
Sapatos com dinheiro	10
Vestidos com cartão	4
Vestidos com crediário	6
Vestidos com dinheiro	5

Pela Tabela 4 percebe-se que os valores das variáveis auxiliares  $d_1^-$  e  $d_2^-$  foram iguais a zero, isto demonstra que as metas para as vendas à vista e para o lucro global foram superadas (o que é bom). Já o valor da variável de desvio  $d_3^+$  associada às vendas na forma de

## PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

pagamento crediário foi 24, que mostra que a meta das vendas na forma de pagamento crediário não foi atingida (o que é ruim), ou seja, houve um número de pagamentos em crediários maior do que o desejado.

Tabela 4. Valores das variáveis desvios para janeiro/2011.

Variáveis desvios	Valores
$d_1^-$	0
$d_2^-$	0
$d_3^+$	24

Para destacar o potencial do modelo desenvolvido e das técnicas utilizadas, na Figura 3, que representa resultados obtidos por intermédio do software *Crystal Ball™*, está uma análise da maximização do lucro global. Percebe-se que, para um determinado cenário de interesse da proprietária da loja, o lucro médio seria de R\$ 3.269,15, sendo a probabilidade de se ter prejuízo de apenas 3,57%.

Outras análises estatísticas nestes dados, como intervalos de confiança e testes de hipóteses, permitem admitir-se que, com o nível de confiança = 95%, o lucro deve se situar no intervalo [-182,5; 7.015,91], ou seja, a política de vendas sugerida pelo modelo é viável e possível de ser implementada pela proprietária, visto que há uma probabilidade baixa de se ter prejuízo, conforme Figura 3.

## PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

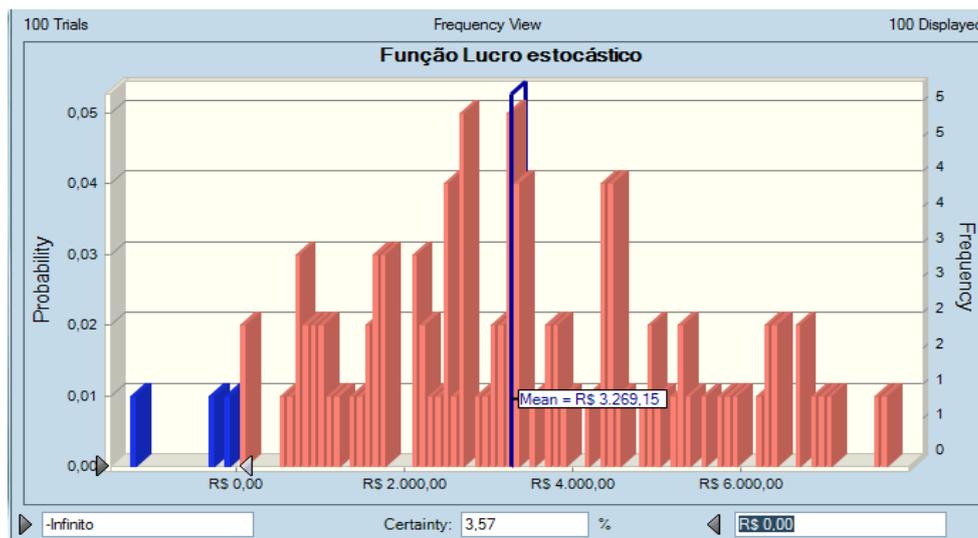


Figura 3. Resultados da otimização para janeiro/2011. (Fonte: Crystal Ball™).

Desta forma, agora a proprietária tem a motivação necessária para viabilizar a implementação dos resultados propostos pelo modelo, por meio do uso de ferramentas mercadológicas como, por exemplo, promoções, melhoria no atendimento, variações no preço de venda dependendo da forma de pagamento, dentre outros.

Vários outros resultados interessantes foram disponibilizados à proprietária da loja que validaram o modelo e as técnicas adotadas. A Figura 4 contempla a análise de sensibilidade para o modelo investigado e, percebe-se, que a venda feita no cartão possui a maior contribuição para o lucro final da empresa, com uma participação de 36%; sendo seguida pelas vendas de sapatos com cartão (29%). Já a maior despesa está vinculada aos funcionários, representando -21%, ou seja, ela contribui para a redução do faturamento da empresa.

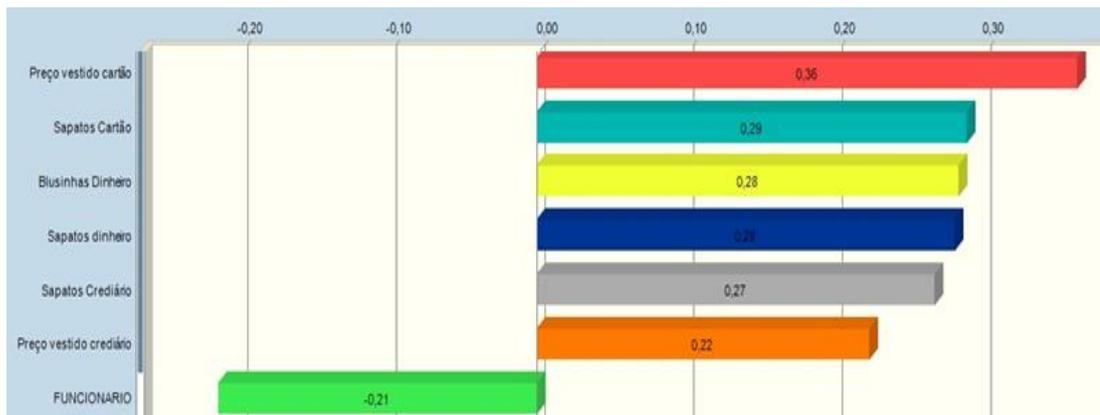


Figura 4. Análise de sensibilidade. (Fonte: Crystal Ball™).

## 7. Comentários finais e sugestões para pesquisas futuras

Neste trabalho demonstrou-se a importância da aplicação de métodos quantitativos visando aumentar a eficiência de MPE's. O emprego de modelos estocásticos com múltiplos objetivos mostrou-se viável e de grande potencial de uso por estas empresas, podendo-se expandir suas aplicações, não apenas às políticas de vendas, como também, às políticas de estocagem, no planejamento e controle da produção, em análise da demanda, dentre outras aplicações.

Como propostas para futuras pesquisas sugerem-se:

- Utilizar a otimização *Fuzzy* estocástica multiobjetivo no desenvolvimento de políticas e estratégias de vendas;
- Incluir os descontos no modelo matemático estocástico;
- Expandir a análise para uma linha de produtos, visando aumentar a aderência do modelo proposto.

## Agradecimentos

Os autores agradecem ao CNPq, a CAPES e a FAPESP pelo apoio.

## Referências

Abdelaziz, F. B. (2012). Solution approaches for the multi-objective stochastic programming. *European Journal of Operational Research*, v. 216, 1-16.

Abdelaziz, F. B.; Aouni, B. & El Fayedh, R. (2007). Multi-objective stochastic programming for portfolio selection. *European Journal of Operational Research*, v. 177, 1811-1823.

- Aouni, B., Ben Abdelaziz, F. & Martel, J. M. (2005). Decision-makers preferences modeling in the stochastic goal programming. *European Journal of Operational Research*, v. 162, 610–618.
- Aouni, B. & La Torre, D. (2010) A generalized stochastic goal programming model. *Applied Mathematics and Computation*, v. 215, 4347-4357.
- Bertrand, J. W. M. & Fransoo, J. C. (2002). Operations management research methodologies using quantitative modeling. *International Journal of Operations and Production Management*, v. 22, 241-264.
- Contini, B. (1968). A stochastic approach to goal programming. *Operations Research*, v. 16, 576–586.
- Deb, K. (2001). *Multi-Objective optimization using evolutionary algorithms*. Chichester: John Wiley & Sons.
- Ignizio, J. P. (1985). *Introduction to linear goal programming*. Beverly Hills: Sage Publications.
- Law, A. M. & Kelton, W. D. (2000). *Simulation modeling and analysis*. 3. ed. Boston: McGraw-Hill.
- Miguel, A. C. M; Fleury, A.; Mello, C. H. P; Nakano, D. N; Turrioni, J. B; Ho, L. L; Morabito, R; Martins, R. A. & Pureza, V. (2010). *Metodologia de pesquisa em engenharia de produção e gestão de operações*, 2a. ed. Rio de Janeiro: Editora Campus.
- Montgomery, D. C.; Runger, G. C. (2009). *Estatística aplicada e probabilidade para engenheiros*, LTC – Livros Técnicos e Científicos, Editora S.A, Rio de Janeiro
- SEBRAE (2007). A Lei Geral e os tributos das MPes. Disponível em: <http://leigeral.sp.sebrae.com.br/perguntasrespostas/tributosmpes.aspx>: Acesso em 16 de set. de 2011.
- Silva, A F, Marins F. A S, Montevechi J A B. (2013). Multi-choice mixed integer goal programming optimization for real problems in a sugar and ethanol milling company. *Applied Mathematical Modelling*, v.37, n.1, p. 6146- 6162.
- Shahinidis, N. V. (2004). Optimization under uncertainty: state of the art and opportunities. *Computers and Chemical Engineering*, v. 28, 971–983.